TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

Zinsstrukturmodelle

Finanzmathematik und Geometrie

Zinsstrukturmodelle - so „einfach“ wie Aktien?

Am 1. September 2015 betrug der Eröffnungskurs der Daimler AG Namensaktie 70.46 €. Das ist einfach und schnell gesagt - und richtig noch dazu. Zinsen jedoch lassen sind nicht so einfach mit einer einzigen Zahl beschreiben: wichtig ist immer, für welche Dauer der Bindung ein Zinssatz gewährt wird. So betrug der Dreimonatszins für US-Staatsanleihen am 1. September 2015 0.33%, der Zehnjahreszinssatz betrug 2.17%, der für 30 Jahre 2.93%. Zinsen sind also nicht einfach nur eine Zahl wie Aktienkurse sondern immer eine Menge von Punkten. Diese Punkte können auch als sichtbare Stellen einer Kurve, der (im Zahlenbeispiel sehr flachen) **Zinsstrukturkurve** gesehen werden.
Nun stellt sich die Frage: Wie sehen solche Kurven typischerweise aus? Welche Eigenschaften haben sie? Wie entwickeln sie sich? Was lässt sich über ihre Entwicklung sagen?
Mit diesen Fragen beschäftigt sich unter anderem die Finanzmathematik im Rahmen der Zinsstrukturmodelle.

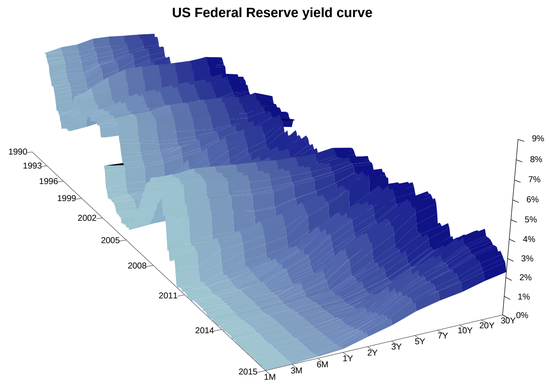

Abbildung 1: Zinsen werden mit glatten Kurven in der Fälligkeit beschrieben. Ihre Veränderung ist zufällig und rau in der Kalenderzeit. In der Abbildung sind ausfallsfreie, effektive US Federal Reserve Investitionsrenditen von 1990 bis 2015 zu sehen.

Beschreibungen der Terminstruktur

Schon die Art und Weise wie die Terminstuktur beschrieben wird, ist nicht eindeutig festgelegt. Wertpapiere, die an der Börse gehandelt werden und in direktem Zusammenhang mit Zinsen stehen, sind **Nullkuponanleihen** (engl. zero cupon bonds): Das sind Schuldverschreibungen, die zum Zeitpunkt der Fälligkeit die Nominale, zum Beispiel einen Euro, zurückzahlen. Diese Wertpapiere werden an den Finanzmärkten gehandelt. Der Preis zum Zeitpunkt t einer Nullkuponanleihe, die zum Zeitpunkt T fällig wird, wird mit $P(t,T)$ bezeichnet. Zu einem fixen Zeitpunkt t (heute) beschreibt die Menge der Nullkuponanleihen, die zu allen zukünftigen Zeitpunkten T fällig werden, die Terminstruktur des Marktes. Der Preis einer Nullkuponanleihe ist zufällig – bis auf den Fälligkeitszeitpunkt T, da wird die Schuld beglichen, also die Nominale zurückerstattet, und es gilt, soferne der Schuldner nicht ausfällt, $P(T,T) = 1$. Der Halter einer Nullkuponanleihe kann diese jederzeit veräußern und so Gewinne oder Verluste machen. Sicher ist ihm aber der innere Zinssatz bis zur Fälligkeit.
Üblicherweise haben Nullkuponanleihen eine maximale Laufzeit von einem Jahr. Während der Laufzeit werden keine Zinsen fällig (daher „Nullkupon“). Nullkuponanleihen sind jedoch meist nur für kürzere Zeiträume verfügbar. Andere Schuldverschreibungen sind mit einem Zinskupon ausgestattet und zahlen zu bestimmten Zeitpunkten vorher festgelegte Zinsen (engl. cupon bearing bonds).
Häufig werden auch zur Beschreibung des Zinsmarktes **yields** verwendet. Yields sind der durchschnittliche Zinsintensität bis zum Zeitpunkt der Fälligkeit, sie sind eine eins-zu-eins Übersetzung der Nullkuponpreise:

$$y(t,T) = -\frac{\ln(P(t,T))}{T-t}. \tag{1}$$

Weitere Möglichkeiten die Zinsstruktur zu beschreiben, sind **Swapraten** und **Terminzinsen**. Terminzinsen sind ähnlich wie yields, aber nicht der durchschnittliche Jahreszinssatz, sondern der von t aus gesehene für den Zeitpunkt T gültige Zinsintensität:

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln(P(t,T))}{\partial T}. \tag{2}$$

Die Gestalten der Zinsstruktur

Bevor ein mathematisches Modell erstellt wird, sollte man sich fragen, wie denn eine typische Zinskurve aussieht, welche Variablen wir gerne modellieren möchten, was unsere Modellannahmen sind und welche Eingenschaften als eher nachrangig betrachtet werden können.
Beobachtet man den Zinsmarkt an einem Tag sowie im Verlaufe der Zeit, so findet man weitere typische Eigenschaften von Zinsstrukturkurven, von denen wir fordern, dass sie unser Modell wiedergibt:

- Die Zinskurve kann zwei lokale Extrema aufweisen
- Zinsen sind stochastisch, kehren aber immer wieder zu einem Mittelwert zurück
- Zinsen sind glatt in der Fälligkeit, aber rau in Verlauf der Kalenderzeit
- Eine Hauptkomponentenanalyse der Modelldaten weist ähnliche Eigenschaften auf wie die von Marktdaten
- Terminzinsen unterschiedlicher Fälligkeit sind (exponentiell) dekorreliert

Wahrscheinlich noch bedeutender als diese statistschen Forderungen an die Zinsstuktur ist folgender Zugang: Es soll keine Investitionsstrategie geben, die Gewinne abwirft, aber frei von jeglichem Risiko ist. Dies ist – nicht zuletzt auch wegen der berühmten Arbeiten des hier tätigen Prof. Walter Schachermayer – ein Standardzugang: **Arbitrage**, d. h. risikofreie Gewinnmöglichkeiten, werden **verboten** und man überlegt sich die Konsequenzen für das Modell und die Zinskurven. Dies ist ein wichtiges Standbein: Wir wollen es als **unmöglich** postulieren, risikofrei die Chance auf ein „**Free Lunch**“ am Zinsmarkt zu haben.

Affine Faktor-Modelle

Eine Modellklasse von zentraler Bedeutung sind die **affinen Modelle**. In einem affinen Modell lassen sich die Preise einer Nullkuponanleihe als exponentiell-affine Funktion der einzelnen Faktoren $\mathbf{r}$ schreiben, es gibt also deterministische Funktionen $A(t,T)$ und $B(t,T)$ für die gilt:

$$P(t,T) = \exp\left\{A(t,T) - \mathbf{r}B(t,T)\right\}. \tag{3}$$

Eine wichtige Verbindung zu Diffusionen (stochastischen Differentialgleichungen) stellt ein Resultat von Duffie und Kan (1996) her, wo gezeigt wird, dass yields dann und im wesentlichen nur dann affin sind, wenn die Drift- und Diffusions-Komponenten der stochastischen Differentialgleichung auch affin sind.
Die Funktionen A und B können durch Lösen von Riccati-Gleichungen bestimmt werden.

Short Rate-Modelle

Eine weitere, wahrscheinlich die beliebteste und bekannteste Art, Zinsen zu modellieren, ist es, den Verlauf der **kurzfristigen Zinsen („short rate“)** mit einer **stochastischen Differentialgleichung** zu beschreiben und daraus auf die gesamte Zinsstruktur zu schließen. Der erste berühmte Versuch in diese Richtung wurde 1977 von **O. Vasiček** unternommen. Er beschieb den Verlauf der short rate als Ornstein-Uhlenbeck-Prozess:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t \quad . \tag{4}$$

Die short rate ist in diesem Modell asymptotisch normalverteilt mit Mittel θ und Varianz $\frac{\sigma^2}{2\kappa}$. Mit positiver Wahrscheinlichkeit können Zinsen also negativ werden, was sicher ein Nachteil dieses Modells ist. Außerdem ist das Modell nicht flexibel genug, um übliche Zinskurven genau genug nachzubilden.

So wurde 1985 eine weitere Verbesserung von **Cox, Ingersoll und Ross** (CIR) vorgeschlagen:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad . \tag{5}$$

Hier sind die short rates nicht zentral χ^2-verteilt, also fast sicher positiv. Trotzdem lässt die Flexibilität der Zinskurven zu wünschen übrig.
Da sowohl der Drift als auch $\sigma^2(r_t)$ in beiden Modellen affine Funktionen von r_t sind, sieht man mit dem obigen Resultat von Duffie und Kan, dass beide hier vorgestellten short rate Modelle sind auch *affine* Ein-Faktor-Modelle sind.

Market Models

Eine weitere Möglichkeit, wie Zinsen oft in der Praxis modelliert werden, sind sogenannte *market models*. Dabei werden direkt entweder die LIBOR (London Interbank Offered Rate) Raten oder Terminzinsen modelliert. So erhält man ein Modell für die Terminzinsen zu den jweiligen diskreten Zeitpunkten. Die Modellklasse wurde erstmals 1997 von Brace, Gatarek und Musiela vorgestellt und noch im selben Jahr von Miltersen, Sandmann und Sondermann ausgebaut.
Auf diese Modellklasse soll in diesem Rahmen nicht näher eingegangen werden.

Parametrische Modelle

Eine andere Art, Zinsstukturen zu modellieren ist, die **Gestalt** der Zinskurven **funktionell festzulegen** und einen endlichdimensionalen Parameterraum vorzugeben, sodass dann alle Zinskurven beschrieben sind. Der erste Versuch in diese Richtung wurde von Nelson und Siegel 1987 unternommen. Sie postulieren die Gestalt der Zinsstrukturkurve als

$$f_{\mathrm{NS}}(x,\mathbf{z}) = z_1 + (z_2 + z_3 x)\exp\left\{-xz_4\right\}.$$

Diese Parametrisierung wird z. B. von den Zentralbanken in Finnland und Italien verwendet.
Später wurde diese Familie von Zinskurven von Svensson erweitert:

$$f_{\mathrm{Sv}}(x,\mathbf{z}) = z_1 + (z_2 + z_3 x)\exp\left\{-z_4 x\right\} + z_5\exp\left\{-z_6 x\right\}.$$

Diese Methode wird heute von den Zentralbanken in Kanada, Deutschland, Frankreich und dem Vereinigten Königreich verwendet.

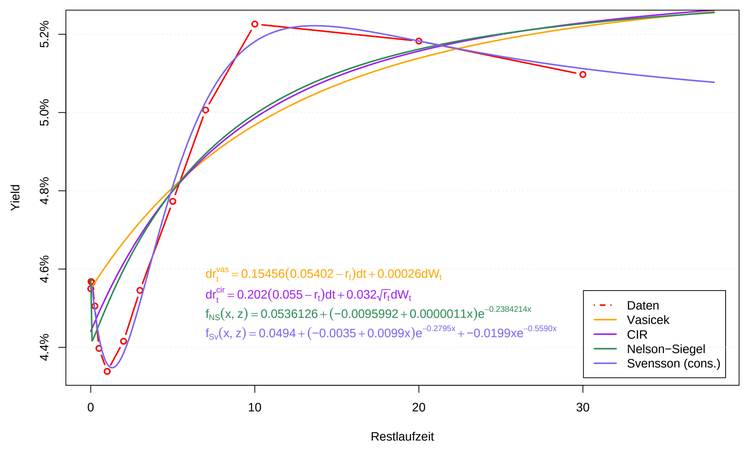

Abbildung 2: Die Zinsstruktur an einem bestimmten Tag. Außerdem wurden die short rate-Modelle von Vasiček und CIR, sowie die parametrischen Modelle von Nelson-Siegel und Svensson an die Daten angepasst.

Die Heath-Jarrow-Morton Methodologie

1992 schlugen **Heath, Jarrow und Morton** (HJM) ein neues Framework für die Modellierung von Zinsen vor: Die Entwicklung der Terminzinsen wird durch ein unendlich-dimensionales System von stochastischen Differentialgleichungen modelliert:

$$\forall T:\ 0 \le T \le T^*: \quad f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(t,T)dt + \int_0^t \sigma(t,T)dW_t \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{6}$$

Diese Gleichung kann aber auch als eine einzige Gleichung in einem passenden (unendlich-dimensionalen) Hilbertraum aufgefasst werden. Hier wird dann die Terminzinskurve als ein einziges Objekt (eine Kurve/Funktion) und nicht als jeder einzelne Punkt von ihr modelliert.
Modelliert man die *Restlaufzeit* $x := T - t \ge 0$, so erhält man, gemeinsam mit der No-Arbitrage Bedingung die sogenannte Musiela-Parametrisierung:

$$\begin{aligned} dr(t,x) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}r(t,x) + \sigma(t,x)\int_0^x \sigma(t,s)ds\right)dt + \sigma(t,x)dW_t \\ r(0,x) &= r^*(0,x) \end{aligned}$$

Konsistenz

Das Framework von HJM setzt einerseits die Kenntnis der Zinsstukturkurve heute und andererseits deren Dynamik für morgen voraus. Eine natürliche Frage wäre nun, unter welchen Bedingungen diese miteinander verträglich sind. Genauer gesagt heißt das zum Beispiel: Gegeben die Nelson-Siegel-Gestalt der Zinsstruktur heute, gibt es ein Modell für die Dynamik der Terminzinsen, das für den folgenden Zeitpunkt wieder eine Zinsstruktur dieser Gestalt erzeugt? Ein theoretisches Resultat von Filipović besagt, dass es keinen nicht-trivialen Markovprozess gibt, der mit der Familie der Terminzinsen von Nelson-Siegel konsistent ist. Ein mit der Svensson Familie konsistenter Prozess wird lediglich von einem einzigen stochastischen Faktor angetrieben.
Eine weitere interessante Fragestellung in diesem Zusammenhang ist die Umkehrung der obigen: Gegeben ein Zinsstukturmodell, wie sehen alle möglichen Terminzinsen aus? Zentral für die Beantwortung dieser Fragen sind sog. endlichdimensionalen Realisierungen und invariante Manigfaltigkeiten.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik
Forschungsgruppe Finanz- und Versicherungsmathematik

Poster gestaltet von Thomas Steiner (2005), aktualisiert von Srećko Mihaljević (2015)