Name:

Mat.Nr.:

Kennz.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik II: zeitstetige Modelle (Vorlesungsprüfung) 20. April 2012 U. Schmock

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt)

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im Sekretariat,
Sandra Trenovatz, Tel. 01-58801-105 51,
e-mail: sandra.trenovatz@tuwien.ac.at

Bsp.	Max.	Punkte
1	12	
2	12	
3	12	
$\sum$	36	

Schriftlich:

Assistentin: J. Eisenberg

Mündlich:

Gesamtnote:

1. Löse die folgenden stochastischen Differentialgleichungen:

   (a)

   $$\mathrm{d}X_t = 3X_t^{2/3}\,\mathrm{d}t,\ \ t \in [0,T] \ \text{ und } \ X_0 = 0\ .$$

   Kann die obige Differentialgleichung eindeutig gelöst werden?

   (b)

   $$\mathrm{d}X_t = X_t^{2}\,\mathrm{d}t,\ \ t \in [0,T] \ \text{ und } \ X_0 = 1\ .$$

   Ist die gefundene Lösung eindeutig?

   Hinweis: $(X_t)_{t\in[0,T]}$ ist ein stetiger Prozess.

2. Sei $\{W_t\}$ eine standard Brownsche Bewegung.
   Betrachte ein zeitstetiges Finanzmarktmodell mit Zinsrate $r > 0$, Volatilität $\sigma > 0$ und dem Aktienpreisprozess

   $$S_t = e^{rt}\exp\{\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\},\ \ t \in [0,\infty)\ .$$

   Zeige: Es gibt genau ein $b > 0$, so dass $X_t = e^{-rt}S_t^{-b}$ ein positives Martingal ist.

   Hinweis: Für $a \in \mathbb{R}$ ist $\{\exp(aW_t - a^2t/2)\}$ ein Martingal.

3. Betrachte ein Black-Scholes-Modell mit dem äquivalenten Martingalmaß Q. Seien $r > 0$ die Zinsrate, $\sigma > 0$ die Volatilität, $\{S_t\}$ der Aktienpreisprozess und $B > 0$.
   Betrachte eine Option mit Auszahlungsfunktion $Z := (S_T - K)^+ \cdot I_{\{\inf_{0\le t\le T} S_t > B\}}$, wobei T die Laufzeit, K den Ausübungspreis, $S_0 > B$, $K > B$, bezeichnen. Der faire Preis dieser Option ist gegeben durch

   $$\mathbb{E}_Q[e^{-rT}Z] = C(S_0,T,K) - \frac{e^{2ab}}{m}C(S_0,T,mK)\ ,$$

   wobei $C(S_0,T,K)$ den Preis eines europischen Calls mit Laufzeit T und Ausübungspreis K bezeichnet und

   $$a := \frac{\sigma}{2},\quad b := \frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{S_0}{B}\right),\quad m := \frac{S_0^2}{B^2}\ .$$

   Berechne den fairen Preis einer Option mit Laufzeit T, Ausübungspreis K, $S_0 > B$, $K > B$, und Auszahlungsfunktion

   $$Y := (S_T - K)^+ \cdot I_{\{\inf_{0\le t\le T} S_t \le B\}}\ .$$

Viel Erfolg!