9. März 2012
Finanzmathematik II: zeitstetige Modelle, U. Schmock

Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt

---

1. Sei W eine standard Brownsche Bewegung. (12 Pkt.)

   (a) Welche stochastische Differentialgleichung löst $Y_t = \sin(W_t)$?

   (b) Löse die folgende stochastische Differentialgleichung:

   $$\mathrm{d}X_t = X_t \,\mathrm{d}W_t \,.$$

2. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, $M = (M_t)_{t\in[0,\infty)}$ ein Martingal auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[M_0] = m \in \mathbb{R}$ sowie $\tau : \Omega \to [0, \infty)$ eine Stoppzeit, unabhängig von M, die nur endlich viele Werte annimmt. M_τ ist eine Zufallsvariable wie gewohnt definiert durch $M_\tau : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto M_{\tau(\omega)}(\omega)$. Berechne $\mathbb{E}[M_\tau]$. (12 Pkt.)

   Alle Rechenschritte sollen ausgeführt werden!

3. (12 Pkt.)
   - Betrachte eine europäische Put-on-Put Option mit dem ersten Ausübungszeitpunkt T_1 und dem zweiten Ausübungszeitpunkt T_2, dem ersten Ausübungspreis K_1 und dem zweiten Ausübungspreis K_2.
     Bestimme den Wert der Option im Zeitpunkt T_1.
   - Betrachte ein Black-Scholes Modell mit konstanter Zinsrate $r = 0$ und dem Aktienpreis S: unter dem MartingalmaßQ ist der Aktienpreisprozess durch

     $$S_t = S_0 \exp\Big\{-\frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma W_t\Big\}\,, \quad S_0, \sigma > 0, \quad 0 \le t \le T\,.$$

     gegeben. Hier bezeichnet $\{W_t\}$ eine standard Brownsche Bewegung unter Q.

     (a) Berechne den arbeitragefreien Preis $p(S_0, T)$ einer Option mit dem Payoff $(S_T - K)^2$.

     (b) Überlege eine Absicherungsstrategie.
     Hinweis: S_t^2 ist bis auf einen Faktor gleich $\exp\Big\{-\frac{\eta^2 t}{2} + \eta W_t\Big\}$ für ein $\eta > 0$.

Viel Erfolg!