Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

Prüfung aus Sachversichungsmathematik (90 Minuten), 20.6.2011
Lösung

(4 Punkte) 1. Es sei $S \sim \mathrm{CP}(\lambda = 6; X)$ mit $\mathbb{P}(X = k) = p_k = \frac{k^3}{36}$ für $k \in \{1, 2, 3\}$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(S = k)$ für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ indem Sie S in eine Linearkombination von Poissonverteilungen zerlegen und dann falten.

Um S als Linearkombination von Poissonverteilungen darzustellen verwendet man Lemma 2.3. Dieses besagt, dass für festes $n \in \mathbb{N}$ und unabhängige Zufallsvariablen $N_i \sim \mathrm{P}(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$, sowie paarweise verschiedenen $k_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, die Linearkombination $\sum_{i=1}^n k_i N_i$ nach $\mathrm{CP}\big(\lambda; p(.)\big)$ verteilt ist, wobei $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ und $p(k_i) = \frac{\lambda_i}{k}$, $i = 1, \ldots, n$.
Da p_k nur für $k \in \{1, 2, 3\}$ ungleich Null ist folgt $k_i = i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Weiters ergibt sich daher $\lambda_i = \lambda p_i = \frac{i^3}{6}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, also $\lambda_1 = \frac{1}{6}$, $\lambda_2 = \frac{4}{3}$ und $\lambda_3 = \frac{9}{2}$. Damit kann S geschrieben werden als

$$S = \sum_{i=1}^{3} i N_i = N_1 + 2N_2 + 3N_3,$$

wobei $N_i \sim \mathrm{P}(\frac{i^3}{6})$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Setzt man $\tilde{N}_i := i N_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, dann gilt $\mathbb{P}(\tilde{N}_i = k) = \mathbb{P}(i N_i = k) = \mathbb{P}\big(N_i = \frac{k}{i}\big)$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Die Summe $\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 + \tilde{N}_3$ kann jetzt mittels Faltung berechnet werden. Man beginnt am besten mit der Berechnung von $S_1 := \tilde{N}_2 + \tilde{N}_3$. Dafür erhält man

$$\mathbb{P}(S_1 = k) = \mathbb{P}(\tilde{N}_2 + \tilde{N}_3 = k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(\tilde{N}_2 = i)\mathbb{P}(\tilde{N}_3 = k - i) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}\Big(N_2 = \frac{i}{2}\Big)\mathbb{P}\Big(N_3 = \frac{k-i}{3}\Big).$$

Beiträge zu dieser Summe gibt es nur falls $\frac{i}{2} \in \mathbb{N}_0$ und auch $\frac{k-i}{3} \in \mathbb{N}_0$. In Abhängigkeit von k ergibt sich daher für i:

k	0	1	2	3
i	0	-	2	0

Man erhält somit

$$\mathbb{P}(S_1 = 0) = \mathbb{P}(N_2 = 0)\mathbb{P}(N_3 = 0) = e^{-\frac{35}{6}}, \qquad \mathbb{P}(S_1 = 2) = \mathbb{P}(N_2 = 1)\mathbb{P}(N_3 = 0) = \frac{4}{3}e^{-\frac{35}{6}},$$

$$\mathbb{P}(S_1 = 1) = 0, \quad , \qquad \mathbb{P}(S_1 = 3) = \mathbb{P}(N_2 = 0)\mathbb{P}(N_3 = 1) = \frac{9}{2}e^{-\frac{35}{6}}.$$

Für $S := \tilde{N}_1 + S_1$ ergibt sich daher

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(N_1 = i)\mathbb{P}(S_1 = k - i).$$

Der Summand ist für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ nur ungleich Null falls $i \in \mathbb{N}_0$ und $k - i \in \{0, 2, 3\}$ gilt. In Abhängibkeit von k ergibt sich daher für i:

k	0	1	2	3
i	0	1	{0,2}	{0,1,3}

Daraus folgt

$$\mathbb{P}(S_2=0)=\mathbb{P}(N_1=0)\mathbb{P}(S_1=0)=e^{-6},$$
$$\mathbb{P}(S_2=1)=\mathbb{P}(N_1=1)\mathbb{P}(S_1=0)=\frac{1}{6}e^{-6},$$
$$\mathbb{P}(S_2=2)=\mathbb{P}(N_1=0)\mathbb{P}(S_1=2)+\mathbb{P}(N_1=2)\mathbb{P}(S_1=0)=\frac{97}{72}e^{-6},$$
$$\mathbb{P}(S_2=3)=\mathbb{P}(N_1=0)\mathbb{P}(S_1=3)+\mathbb{P}(N_1=1)\mathbb{P}(S_1=2)+\mathbb{P}(N_1=3)\mathbb{P}(S_1=0)=\frac{6121}{1296}e^{-6}.$$

Für die numerischen Werte ergibt sich (gerundet)

$$\mathbb{P}(S=0)=0.002479, \qquad \mathbb{P}(S=2)=0.003339,$$
$$\mathbb{P}(S=1)=0.0004132, \qquad \mathbb{P}(S=3)=0.01171.$$

(4 Punkte) 2. Sei $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ eine streng monoton wachsende und konvexe Funktion. Für $k\in\mathbb{N}_0$ bezeichne $\mathcal{L}^k\big([0,\infty)\big)$ die Menge aller diskreten Zufallsvariablen $X:\Omega\to[0,\infty)$ mit $\mathbb{E}(|X|^k)<\infty$. Sei weiters

$$\mathcal{L}:=\big\{X\in\mathcal{L}^0\big([0,\infty)\big):g(X)\in\mathcal{L}^2\big([0,\infty)\big)\big\}$$

und betrachten Sie die Verlustfunktion

$$L:\begin{cases}\mathcal{L}\times[0,\infty) & \to[0,\infty)\\ (S,a) & \mapsto\mathbb{E}\Big(\big(g(S)-g(a)\big)^2\Big)\end{cases}.$$

Zeigen Sie:

(*i*) Für $S\in\mathcal{L}$ besitzt die Abbildung

$$L_S:\begin{cases}[0,\infty) & \to[0,\infty)\\ a & \mapsto L(S,a)\end{cases}$$

ein eindeutiges Minimum an der Stelle $\mathcal{H}(S):=g^{-1}\big(\mathbb{E}(g(S))\big)$.
Hinweis: Minimieren Sie zunächst die Funktion $b\mapsto\mathbb{E}\big((X-b)^2\big)$ für $X\in\mathcal{L}^2\big([0,\infty)\big)$, $b\in[0,\infty)$ und nutzen Sie dann die Eigenschaften von g.

(*ii*) Es gilt $\mathbb{E}(S)\le\mathcal{H}(S)$ für alle $S\in\mathcal{L}$.

(*iii*) Für $g(x)=e^{\gamma x}$ mit $\gamma>0$ stimmt das Prämienprinzip $\mathcal{H}(S)$ mit dem Exponentialprinzip mit Parameter γ überein.

ad (*i*) : Betrachtet man die Funktion aus dem Hinweis, also

$$f:\begin{cases}[0,\infty) & \to[0,\infty)\\ b & \mapsto\mathbb{E}\big((X-b)^2\big)\end{cases},$$

für $X\in\mathcal{L}^2\big([0,\infty)\big)$, dann erhält man aus der Linearität des Erwartungswertes $f(b)=\mathbb{E}(X^2)-2\mathbb{E}(X)b+b^2$. Für die ersten beiden Ableitungen ergibt sich

$$f'(b)=-2\mathbb{E}(X)+2b, \quad f''(b)=2.$$

Daraus folgt, dass das eindeutige Minimum an der Stelle $b_{\min} := \mathbb{E}(X)$ angenommen wird. Aufgrund der strengen Monotonie von g ist die Minimierung der Verlustfunktion L_S gleichwertig mit der Minimierung der Verlustfunktion $L_S^g : g\big([0,\infty)\big) \to [0,\infty)$ mit $L_S^g(b) := \mathbb{E}\big((g(S)-b)^2\big)$. Diese besitzt ein eindeutiges Minimum an der Stelle $b_{\min} := \mathbb{E}(g(X))$. Wegen $b_{\min} \in [0,\infty)$ und aufgrund der strengen Monotonie von g gibt es ein eindeutiges $a_{\min} \in [0,\infty)$ mit $b_{\min} = g(a_{\min})$, also $a_{\min} = g^{-1}(b_{\min}) = g^{-1}\big(\mathbb{E}(g(S))\big)$. Da g streng monoton wachsend und konvex ist gilt $g\big([0,\infty)\big) = [g(0),\infty)$. Für $S \in \mathcal{L}$ gilt daher $\mathbb{E}\big(g(S)\big) \in [g(0),\infty)$. Aus der strengen Monotonie von g folgt außerdem die Existenz der Umkehrfunktion $g^{-1} : [g(0),\infty) \to [0,\infty)$. Also ist $\mathcal{H}(S)$ wohldefiniert.

ad (ii) : Da g konvex ist und mit g auch die Umkehrfunktion g^{-1} streng monoton wachsend ist, folgt mit der Ungleichung von Jensen

$$\mathbb{E}(S) = g^{-1}\big(g(\mathbb{E}(S))\big) \le g^{-1}\big(\mathbb{E}(g(S))\big) = \mathcal{H}(S).$$

ad (iii) : Für $g(x) = e^{\gamma x}$, $\gamma > 0$, ergibt sich $g^{-1}(x) = \frac{1}{\gamma}\ln(x)$ und somit für das Prämienprinzip

$$\mathcal{H}(S) = \frac{1}{\gamma}\ln\big(\mathbb{E}(e^{\gamma S})\big) = \frac{1}{\gamma}\ln\big(M_S(\gamma)\big).$$

(4 Punkte) 3. Berechnen Sie für ein Negativbinomial-Beta-Modell, d.h. $X|(\Theta = \theta) \sim \mathrm{NB}(r,\theta)$ wobei $\Theta \sim \mathrm{Be}(\alpha,\beta)$ und $\alpha,\beta,r > 0$, die exakte Credibility Schätzfunktion $\overline{e}(x_1,\ldots,x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Credibilityfaktor z, falls $\overline{e}$ die Gestalt einer Credibilityformel hat.

Für $Y \sim \mathrm{NB}(r,\theta)$ gilt

$$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{k+r-1}{k}\theta^r(1-\theta)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

sowie $\mathbb{E}(Y) = r\frac{1-\theta}{\theta}$. Die Dichte der Betaverteilung ist gegeben durch

$$f(\theta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}, \quad \theta \in [0,1].$$

Ist $\alpha > 1$ und $\Theta \sim \mathrm{Be}(\alpha,\beta)$, dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\frac{1-\Theta}{\Theta}\Big) &= \int_0^1 \frac{1-\theta}{\theta}\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}d\theta = \int_0^1 \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\theta^{\alpha-2}(1-\theta)^{\beta}d\theta = \\ &= \frac{B(\alpha-1,\beta+1)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{\beta}{\alpha-1}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Für die A-posteriori Verteilung ergibt sich

$$\begin{aligned}\pi(\theta|\underline{x}) &\propto l(\theta|\underline{x})\pi(\theta) \propto \theta^{nr}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} = \theta^{nr+\alpha-1}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i+\beta-1} \sim \\ &\sim \mathrm{Be}\Big(nr+\alpha, \sum_{i=1}^n x_i + \beta\Big).\end{aligned}$$

Sei $\tilde{\Theta} \sim \pi(\theta|\underline{x})$, dann folgt mit Gleichung (1)

$$\overline{e}(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(X|\theta)\pi(\theta|\underline{x})d\theta = \int_0^1 r\frac{1-\theta}{\theta}\pi(\theta|\underline{x})d\theta = r\mathbb{E}\Big(\frac{1-\tilde{\Theta}}{\tilde{\Theta}}\Big) = r\frac{\sum_{i=1}^n x_i + \beta}{nr+\alpha-1},$$

für $nr + \alpha > 1$.
Es bleibt noch die zu untersuchen ob $\overline{e}$ die Gestalt einer Credibilityformel hat. Es gilt $\mathcal{P}^I = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ und für die Prämie im Kollektiv, also $\mathbb{E}(X)$, erhält man wieder mit Gleichung (1)

$$\mathcal{P}^K = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\Theta)) = \mathbb{E}\Big(r\frac{1-\Theta}{\Theta}\Big) = r\mathbb{E}\Big(\frac{1-\Theta}{\Theta}\Big) = \frac{r\beta}{\alpha-1}, \quad \alpha > 1.$$

Die Credibility Schätzfunktion kann daher für $\alpha > 1$ geschrieben werden als

$$\begin{aligned}\overline{e}(\underline{x}) = r\frac{\sum_{i=1}^n x_i + \beta}{nr+\alpha-1} &= \frac{rn}{nr+\alpha-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i + \frac{r\beta}{nr+\alpha-1}\cdot\frac{\alpha-1}{\alpha-1} = \\ &= \frac{rn}{nr+\alpha-1}\mathcal{P}^I + \frac{\alpha-1}{nr+\alpha-1}\mathcal{P}^K = \frac{rn}{nr+\alpha-1}\mathcal{P}^I + \Big(1-\frac{rn}{nr+\alpha-1}\Big)\mathcal{P}^K.\end{aligned}$$

Setzt man $z := \frac{rn}{nr+\alpha-1}$ für $\alpha > 1$, dann gilt $z \in (0,1)$, $\lim_{n\to\infty} = 1$ und z hängt nur von der Anzahl der Daten und nicht den Daten selbst ab. Für $\alpha > 1$ ist daher z ein Credibilityfaktor und $\overline{e}(\underline{x})$ hat die Gestalt einer Credibilityformel.