1. Sei $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} (X_i + T_i)^2$, wobei die X_i i.i.d. Zufallsvariable mit der Dichte $f(x)$ sind. Weiter seien die T_i die Ankunftszeiten des homogenen Poissonprozesses $N(t)$ mit Intensität $\lambda = 2$. Berechnen Sie $E[S(t)]$ für

   (a) $f(x) = e^{-x}$ für $x \geq 0$

   (b) $f(x) = xe^{-x}$ für $x \geq 0$

2. Der Bestand eines Versicherungsunternehmens (VU) wird durch die Schadenzahl $N \sim Poisson(1)$ und die Einzelschadenhöhe $X \sim Gamma(2, 2)$ (i.e. $f_X(x) = 4xe^{-2x}$) beschrieben. Der Rückversicherer übernimmt 20 Prozent der Einzelschäden.

   (a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des Gesamtschadens für das VU.

   (b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des Gesamtschadens für den Rückversicherer !

   (c) Addieren sich die Varianzen aus a) und b) zur Varianz des Gesamtschadens ? Begründen Sie !

3. Betrachten Sie die i-te Police im Heterogenitätsmodell. Der Heterogenitätsparameter λ sei exponentialverteilt mit $\lambda \sim Exp(1)$. Für gegebenes λ seien die Schäden $X_1, ..., X_n$ i.i.d. mit $X_i|\lambda \sim Exp(\lambda)$.

   (a) Berechnen Sie die a-posteriori Verteilung für λ.

   (b) Berechnen Sie die a-posteriori Wahrscheinlichkeit für

   $$\lambda \geq 2$$

   falls $n = 5$ und der Mittelwert der X_i durch 1.2 gegeben ist. (Bemerkung: Sie müssen im Endergebnis nicht alle Integrale numerisch auswerten !)

1. Sei $N(t)$ ein inhomogener Poissonprozeß mit $\lambda(t)$ gegeben durch $\lambda(t) = 2$ für $t \in [0,1[$, $\lambda(t) = 1+t$ für $t \in [1,2[$ und $\lambda(t) = 5$ für $t \geq 2$. Die Mittelwertfunktion sei $\mu(t)$

   (a) Ueberprüfen Sie, ob μ^{-1} existiert und falls ja, berechnen Sie diese Funktion.

   (b) Sei $\hat{N}(t) := N(\mu^{-1}(t))$. Geben Sie $E[N(4)]$ bzw. $E[\hat{N}(4)]$ an.

2. Die Schadenhöhe S sei gegeben durch folgende Zufallsvariable

$$S(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrsch. } 1/2 \\ 2 & \text{mit Wahrsch. } 1/2. \end{cases}$$

   Die Nutzenfunktion $u(z)$ sei gegeben durch $u(z) = z$, falls $z \leq 5$ gilt, bzw. $u(z) = 5$, falls $z \geq 5$ gilt. Berechnen Sie die Prämie $P(x)$ nach dem Nullnutzenprinzip, falls für das Eigenkapital x gilt

   (a) $x = 2$

   (b) $x = 6$

3. Es sei $S \sim CompoundPoisson(\lambda = 2;\, X)$ mit $P(X = k) = p_k = k^2/14 \quad$ für $k = 1, 2$ und 3.

   (a) Zerlegen Sie S in eine Linearkombination von unabhängigen Poissonverteilungen.

   (b) Benutzen Sie a) um $P(S = 1)$ zu berechnen.

1. Für einen nicht-homogenen Poissonprozeß $N(t)$ mit Intensität $\lambda(t)$, sei T die Zeit bis zur ersten Ankunft.

   (a) Berechnen Sie die Dichtefunktion für die Zufallsvariable T.

   (b) Sei nun konkret $\lambda(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Gilt $E[T] < \infty$?

2. Der Bestand eines Versicherungsunternehmens (VU) wird durch die Schadenzahl $N \sim Poi(10)$ und die Einzelschadenhöhe $X \sim U([0, 2000])$ (-Gleichverteilung) beschrieben. Das VU schließt eine excess-of-loss Rückversicherung mit einem Selbstbehalt $M = 1600$ ab.

   (a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des Gesamtschadens für das VU.

   (b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des Gesamtschadens für den Rückversicherer.

3. Betrachten Sie die i-te Police im Heterogenitätsmodell. Der Heterogenitätsparameter θ sei normalverteilt mit $\theta \sim N(\mu, \sigma_2^2)$. Für gegebenes θ seien die Schäden $X_1, ..., X_n$ i.i.d. mit $X_i|\theta \sim N(\theta, \sigma_1^2)$.

   (a) Berechnen Sie die a-posteriori Verteilung für θ.

   (b) Berechnen Sie den optimalen Bayes Schätzer für $E[X_i|\theta]$