Risikotheorie
03/06

1. Die Schadenhöhe S sei gegeben durch folgende Zufallsvariable

$$S(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrsch. } 1/2 \\ 2 & \text{mit Wahrsch. } 1/2. \end{cases}$$

   Berechnen Sie für die Nutzenfunktion $u(z) = \sqrt{z}$ die Prämie $P(x)$ nach dem Nullnutzenprinzip, falls für das Eigenkapital x gilt

   (a) $x = 2$

   (b) $x = 4$

   (c) Berechnen Sie $\lim_{x \to \infty} P(x)$!

2. Ω sei die disjunkte Vereinigung von nicht-leeren Mengen $A_{ij}, 1 \le i \le M, 1 \le j \le N$. Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, wobei die σ-Algebra $\mathcal{F}$ durch die Mengen $A_{ij}, 1 \le i \le M, 1 \le j \le N$ erzeugt wird und das Wahracheinlichkeitsmaß $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ durch $P(A_{ij}) = p_{ij} > 0, 1 \le i \le M, 1 \le j \le N$, bestimmt ist. Sei $X = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} x_{ij} \mathbf{1}_{A_{ij}}$ eine $\mathbf{R}$-wertige Zufallsvariable. Sei $\mathcal{G}$ die von den Mengen $A_i := \bigcup_{j=1}^{N} A_{ij}, 1 \le i \le M$, erzeugte σ-Algebra. Berechnen Sie $E[X|\mathcal{G}]$.

3. Betrachten Sie den Risikoprozeß $R_t = x + ct - \sum_{n=1}^{N_t} X_n$. N_t ist ein Poissonprozeß mit Intensität $\lambda = 3$, unabhängig von $(X_n)_{n \ge 1}$. Weiters gelte $c = 10$.

   (a) Schätzen Sie die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(x)$ für $x = 5$ nach oben ab. Nehmen Sie dabei an, daß die Einzelschadenhöhen $(X_n)_{n \ge 1}$ unabhängig sind und durch die Dichtefunktion $f(z) = \frac{1}{2} e^{-z} + e^{-2z}$ gegeben sind.

   (b) Berechnen Sie $\psi(0)$.

Risikotheorie , Jänner 2006

1. Die Schadenhöhe S sei gegeben durch folgende Zufallsvariable

$$S(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrsch. } 1/2 \\ 2 & \text{mit Wahrsch. } 1/2. \end{cases}$$

   Berechnen Sie für die Nutzenfunktion $u(z) = \sqrt{z}$ die Prämie $P(x)$ nach dem Nullnutzenprinzip, falls für das Eigenkapital x gilt

   (a) $x = 2$

   (b) $x = 4$

   (c) Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} P(x)$!

2. Ω sei die disjunkte Vereinigung von nicht-leeren Mengen $A_{ij}, 1 \le i \le M, 1 \le j \le N$. Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, wobei die σ-Algebra $\mathcal{F}$ durch die Mengen $A_{ij}, 1 \le i \le M, 1 \le j \le N$ erzeugt wird und das Wahracheinlichkeitsmaß $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ durch $P(A_{ij}) = p_{ij} > 0, 1 \le i \le M, 1 \le j \le N$, bestimmt ist. Sei $X = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} x_{ij} \mathbf{1}_{A_{ij}}$ eine $\mathbf{R}$-wertige Zufallsvariable. Sei $\mathcal{G}$ die von den Mengen $A_i := \bigcup_{j=1}^{N} A_{ij}, 1 \le i \le M$, erzeugte σ-Algebra. Berechnen Sie $E[X|\mathcal{G}]$.

3. Betrachten Sie den Risikoprozeß $R_t = x + ct - \sum_{n=1}^{N_t} X_n$. N_t ist ein Poissonprozeß mit Intensität $\lambda = 2$, unabhängig von $(X_n)_{n\ge1}$. Weiters gelte $c = 5$. Die Einzelschäden X_n seien unabhängig verteilt und durch die Verteilungsfunktion $F(z) = 1 - e^{-z}$ gegeben.

   (a) Geben Sie den exakten Wert für die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(x)$ für $x = 10$ an.

   (b) Für welche Anfangsvermögen x ist die Ruinwahrscheinlichkeit kleiner als 0.001 ?

   (c) Für welche Werte c ist der Sicherheitszuschlag (security loading) positive ?

   (d) Bestimme c so, dass $\psi(10) = 0.001$ gilt.

   (e) Wie hängt $\psi(0)$ von der Schadensverteilung ab ?

Risikotheorie, Dezember 2005

1. Die Schadenhöhe sei gegeben durch eine Zufallsvariable S mit der Dichte $f(s) = b^2 s e^{-bs}$ auf $\mathbf{R}_+$ für ein $b > 0$ gegeben und die Nutzenfunktion $u(z) := \frac{1-e^{-az}}{a}$ mit $a > 0$ sei gegeben.

   (a) Berechnen Sie die Prämie $P(a)$ nach dem Nullnutzenprinzip bzgl. u für ein Anfangskapital $x \in \mathbf{R}$.

   (b) Berechnen Sie $\lim_{a \searrow 0} P(a)$.

2. Ω sei die disjunkte Vereinigung von nicht-leeren Mengen $A_{ij}, 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N$. Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, wobei die σ-Algebra $\mathcal{F}$ durch die Mengen $A_{ij}, 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N$ erzeugt wird und das Wahracheinlichkeitsmaß $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ durch $P(A_{ij}) = p_{ij} > 0, 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N$, bestimmt ist. Sei $X = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} x_{ij} \mathbf{1}_{A_{ij}}$ eine $\mathbf{R}$-wertige Zufallsvariable. Sei $\mathcal{G}$ die von den Mengen $A_i := \bigcup_{j=1}^{N} A_{ij}, 1 \leq i \leq M$, erzeugte σ-Algebra. Berechnen Sie $E[X|\mathcal{G}]$.

3. Betrachten Sie den Risikoprozeß $R_t = x + ct - \sum_{n=1}^{N_t} X_n$. N_t ist ein Poissonprozeß mit Intensität $\lambda = 3$, unabhängig von $(X_n)_{n \geq 1}$. Weiters gelte $c = 10$.

   (a) Schätzen Sie die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(x)$ für $x = 10$ nach oben ab. Nehmen Sie dabei an, daß die Einzelschadenhöhen $(X_n)_{n \geq 1}$ unabhängig sind und durch die Dichtefunktion $f(z) = \frac{1}{2} e^{-z} + e^{-2z}$ gegeben sind.

   (b) Berechnen Sie $\psi(0)$.

Risikotheorie Okt 2009

1. Die Schadenhöhe sei gegeben durch eine Zufallsvariable S mit der Dichte $f(s) = 9se^{-3s}$ auf $\mathbf{R}_+$ und die Nutzenfunktion $u(z) := \frac{1-e^{-az}}{a}$ mit $a > 0$ sei gegeben.

   (a) Berechnen Sie die Prämie $P(a)$ nach dem Nullnutzenprinzip bzgl. u für ein Anfangskapital $x \in \mathbf{R}$.

   (b) Berechnen Sie $\lim_{a \searrow 0} P(a)$.

2. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit Werten in $[0,1]$ und sei $\mathcal{F}_n$ die von $X_0, \cdots, X_n$ erzeugte σ-Algebra. Weiters sei $X_0 = a \in [0,1]$ und es gelte für alle $n \geq 0$:

$$P\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n, \quad P\left(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) = X_n. \tag{1}$$

   (a) Zeigen Sie: $(X_n)_{n\geq 0}$ ist ein Martingal.

   (b) Zeigen Sie:

$$E[(X_{n+1} - X_n)^2] = \frac{1}{4} E[X_n(1 - X_n)]. \tag{2}$$

3. Betrachten Sie den Risikoprozeß $R_t = x + ct - \sum_{n=1}^{N_t} X_n$. N_t ist ein Poissonprozeß mit Intensität $\lambda = 4$, unabhängig von $(X_n)_{n\geq 1}$. Weiters gelte $c = 2$.

   (a) Schätzen Sie die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(x)$ für $x = 5$ nach oben ab. Nehmen Sie dabei an, daß die Einzelschadenhöhen $(X_n)_{n\geq 1}$ unabhängig sind und durch die Dichtefunktion $f(z) = \frac{1}{2}e^{-z} + e^{-2z}$ gegeben sind.

   (b) Berechnen Sie $\psi(0)$.