Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

# Risiko- und Ruintheorie
# (Vorlesungsprüfung)
# 14. November 2013
# J. Eisenberg/F. Hubalek

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im Sekretariat, FH 7.Stock,
Sandra Trenovatz, Tel. 01 / 58801 - 10511,
e-mail: `secr@fam.tuwien.ac.at`

| Bsp. | Max. | Punkte |
|---|---|---|
| 1 | 5 | |
| 2 | 5 | |
| 3 | 5 | |
| $\sum$ | 15 | |

1. Ein Versicherungsunternehmen modelliert ein Portfolio mit einem Cramer-Lundberg-Modell, wobei $x \geq 0$ das Anfangskapital ist, der Schadenanzahlprozess den Poisson-Parameter $\lambda > 0$ hat, und die Einzelschäden exponentialverteilt mit **Erwartungswert** $\mu > 0$ sind. Die Prämienrate $c > 0$ soll mit dem Erwartungswertprinzip mit Sicherheitszuschlag $\eta > 0$ ermittelt werden.

   (a) Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen $X_4 + X_6$.

   (b) Angenommen, der Versicherer kauft proportionale Rückversicherung, so dass der Rückversicherer für jeden Einzelschaden $(1-a)X_i$, $i \geq 1$, $a \in [0,1]$ übernimmt.

   Die Rückversicherung arbeitet auch mit dem Cramer-Lundberg-Modell und berechnet die Prämienrate auch mit dem Erwartungswertprinzip mit dem gleichen Sicherheitszuschlag $\eta$. Welche Rate $c_R$ verrechnet die Rückversicherung dem Versicherer? Sei $c_V$ die Rate, die dem Versicherer (nach Abzug der Prämien für die Rückversicherung) bleibt. Wie hoch ist $c_V$ ?

   (c) Sei nun $c_V = 1$, $\lambda = 2$, $a = 0.3$. Für welche Werte von $\mu$ ist der relative Sicherheitszuschlag (nach dem Kauf der Rückversicherung) positiv?

   (d) Zeigen Sie, dass der Anpassungskoeffizient für das Portfolio des Versicherers (nach Kauf der Rückversicherung) existiert, wenn, der entsprechende relative Sicherheitszuschlag positiv ist.[1]

   (e) Sei hier $a = 1$, d.h. es wird keine Rückversicherung gekauft. Angenommen, der Versicherer muss Dividenden an die Teilhaber ausschütten. Dies geschieht stetig in der Zeit mit einer Dividendenrate $w > 0$, d.h. in jedem Zeitntervall $[0,t]$ zahlt der Versicherer $wt$ als Dividenden aus. Beschreiben Sie (ohne Beweis!) **möglichst genau** das Verhalten der Überlebenswahrscheinlichkeit des Versicherers für $x \to \infty$, wenn *(i)* $c < \lambda\mu + w$, *(ii)* $c = \lambda\mu + w$, *(iii)* $c > \lambda\mu + w$.

[1] Sie können diese Aufgabe wahlweise für die konkreten Werte aus (c) oder allgemein behandeln.

2. (a) Gegeben sind zwei unabhängige Schäden $X_1$ und $X_2$, die Poisson-verteilt mit Parametern $\lambda_1 = 10$ bzw. $\lambda_2 = 20$ sind. Berechnen Sie die Prämie für $S = X_1 + X_2$ nach dem Exponentialprinzip mit Risikoaversion $a = 0.4$.

(b) Gegeben sei eine iid Folge $(X_i)_{i\geq 1}$ von normalverteilten Zufallsvariablen mit Mittelwert 0 und Varianz 1, und eine davon unabhängige negativ binomialverteilte Zufallsvariable $N$ mit Paramentern $p = 1/2$ und $\alpha = 2$. Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion der Zufallssumme

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \ .$$

Berechnen Sie $\mathbb{E}[S]$ und $\mathrm{Var}[S]$.

(c) Seien $N$ und $Y$ zwei Zufallsvariablen, und $Y$ habe die Dichte

$$f(y) = \frac{a^b}{\Gamma(b)} y^{b-1} e^{-ay} \ \text{ für } \ y > 0$$

mit $a, b > 0$. Und für $N$ gelte

$$\mathbb{P}[N = k | Y = y] = e^{-y} \frac{y^k}{k!} \ \text{ for } \ k \in \mathbb{N} \ .$$

Berechnen Sie $\mathbb{P}[N = k]$. Welche Verteilung hat $N$?
Hinweis: Beachten Sie, dass $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. Gegeben sind zwei unabhängige Risiken $X$ und $Y$ mit

$$\mathbb{P}[X = -1] = 0.1 \qquad \mathbb{P}[X = 2] = 0.9 \, ,$$

und

$$\mathbb{P}[Y \leq x] = (1 - e^{-2x-2}) I_{\{x \geq -1\}}, \quad x \in \mathbb{R} \, .$$

Ferner definieren wir $Z = X + Y$.

(a) Berechnen Sie $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ für alle $\alpha \in (0,1)$.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{ES}_{0.25}(X)$.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{VaR}_\alpha(Y)$ für alle $\alpha \in (0,1)$.

(d) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $Z$ und fertigen Sie eine Skizze davon für $-3 \leq x \leq 5$ an.

(e) Berechnen Sie $\mathrm{VaR}_{0.25}(Z)$.