Name:

Mat.Nr.:

Studienkennz.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Risiko- und Ruintheorie
(Vorlesungsprüfung)
12. März 2009
F. Hubalek (WS 2008/09)

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt)

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im Sekretariat, FH 7.Stock,
Sandra Trenovatz, Tel. 01 / 58801 - 10511,
e-mail: `secr@fam.tuwien.ac.at`

Bsp.	Max.	Punkte
1	6	
2	6	
3	6	
$\sum$	18	

1. (a) Gegeben sei ein klassischer Cramer-Lundberg-Ruinprozess mit geometrisch verteilten Schäden[1]. Finden Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass Ruin bereits beim ersten Schaden eintritt.

   (b) Für den Rest der Aufgabe, d.h. (b)–(e), nehmen wir an, dass die Schadensintensität 1, der Erwartungswert eines Einzelschadens 1 und die Prämienrate 2 ist. Berechnen Sie den relativen Sicherheitszuschlag.

   (c) Geben Sie eine (nichttriviale!) obere und eine (nichttriviale!) untere Schranke für den Lundberg-Koeffizienten an.

   (d) Finden Sie ein möglichst kleines Anfangskapital, sodass die Ruinwahrscheinlichkeit unter 0.01 liegt.

   (e) Geben Sie eine (beliebige positive) untere Schranke für die Ruinwahrscheinlichkeit an, wenn das Anfangskapital 10 ist.

2. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\Omega = \{\omega_1, \omega\}$, $\mathcal{F} = \mathfrak{P}(\Omega)$ die Potenzmenge, und P die Gleichverteilung, also $P[\{\omega_1\}] = P[\{\omega_1\}] = 1/2$. Weiters sei $\mathcal{G}$ die Menge aller Risiken auf Ω, d.h. die Menge aller Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}^2$.

   Wir können also, wie in der Vorlesung, $\mathcal{G}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren, indem wir ein Risiko X mit $X(\omega_1) = x_1$ und $X(\omega_2) = x_2$ als Punkt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ auffassen.

   (a) Berechnen Sie $\mathrm{VaR}_{0.05}(X)$ für $X \in \mathcal{G}$. Unterscheiden Sie dabei $x_1 < x_2$, $x_1 = x_2$, $x_1 > x_2$.

   (b) Finden Sie eine einfache ,,Formel" für $\mathrm{VaR}_{0.05}(X)$, in der die drei Fälle aus (a) zusammengefasst sind.

   (c) Beschreiben oder skizzieren Sie die entsprechende Akzeptanzmenge $\mathcal{A}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

   (d) Ist $\mathrm{VaR}_{0.05}$ in dieser ,,Spielzeug-Welt", i.e. auf $\mathcal{G}$, konvex? Kohärent? (Begründung!)

   (e) Berechnen Sie $ES_{0.05}(X)$ für $X(\omega_1) = -1$, $X(\omega_2) = 10$.

3. (a) Sei $0 < p < 1$. Betrachten Sie einen Schaden $X \sim \mathrm{Geo}(p)$, also mit geometrischer Verteilung

$$P[X = n] = (1 - p)p^n, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

   Geben Sie sorgfältig die Verteilungsfunktion $F_X(x) = P[X \leq x]$ für $x \in \mathbb{R}$ (also nicht nur für $x = 0, 1, \ldots$) an.

   (b) Sei nun $0 < p < q < 1$ sowie $X \sim \mathrm{Geo}(p)$ und $Y \sim \mathrm{Geo}(q)$. Gilt $X \leq_{\mathrm{st}} Y$, $Y \leq_{\mathrm{st}} X$, oder sind X und Y bezüglich der stochastischen Ordnung nicht vergleichbar (d.h. ,,weder noch")?

   (c) Nun etwas anderes: Gegeben seien die Zahlen $0 < p < 1$ und $\beta > 0$. Ein Gesamtschaden wird durch eine Zufallssumme beschrieben in der die Schadensanzahl geometrisch nach $\mathrm{Geo}(p)$ verteilt sind und die Schäden exponentialverteilt mit Erwartungswert $1/\beta$ sind. Für welche Risikoaversionsparameter $\alpha > 0$ ist der Gesamtschaden versicherbar nach dem Exponentialprinzip?

   (d) Fixieren Sie nun für den Rest der Aufgabe, also (c)–(d), die Zahlenwerte $p = 0.7$, $\beta = 1$, $\alpha = 0.1$. Berechnen Sie die Prämie nach dem Exponentialprinzip.

   (e) Berechnen Sie die Prämie nach dem Standardabweichungsprinzip mit Parameter $a = 0.2$.

[1] Eine Zufallsvariable mit geometrische Verteilung, wie sie in der Vorlesung definiert wurde, kann auch den Wert 0 annehmen. Ein solcher Nullschaden ist aber für diese Aufgabe kein Problem und erfordert keine spezielle Behandlung.