Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Lebensversicherungsmathematik
(Vorlesungsprüfung)
Januar 2023
Ass. Prof. Dr. Julia Eisenberg

Dauer: 90 Minuten

Unterlagen: ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner ist erlaubt

Ab 50% hat man bestanden.

Bsp.	Max.	Punkte
1	6	
2	5	
3	6	
4	8	
5	5	
$\sum$	30	

Assistent:

Gesamtnote:

1. Die Verteilungsfunktion der Gesamtlebenszeit T_0 einer Person habe die Form

$$G_0(t) = \frac{t^2 + 300t}{40000}, \quad t \in [0, \omega],$$

wobei ω das höchste erreichbare Alter bezeichnet.

   (a) Bestimmen Sie das von G_0 implizierte ω; [1 pkt]

   (b) Bestimmen Sie ${}_{40}q_0$; [1 pkt]

   (c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Restlebenszeit T_x einer x-jährigen Person für $x \in [0, \omega]$; [2 pkt]

   (d) Bestimmen Sie die Sterbeintensität einer x-jährigen Person. [2 pkt]

2. Nehmen Sie an, dass die Sterbeintensität $\mu > 0$ konstant ist.

   (a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Restlebenszeit T_x. [2 pkt]

   (b) Für eine 50-jahrige Person bestimmen Sie die Nettoeinmalprämie einer lebenlänglichen stetig auszahlenden Ablebensversicherung (die Auszahlung erfolgt im Todeszeitpunkt) mit Versicherungssumme 1 zuerst allgemein und dann numerisch für $i = 0.02$ und $\mu = 0.01$. [3 pkt]

3. Seien die gestutzte Restlebenszeit K_x einer x-jährigen Person und die unterjährige Restlebenszeit S unabhängig, S gleichverteilt auf $[0, 1]$. Bestimmen Sie

   - ${}_{0.5}q_{64}$ [1 pkt]
   - ${}_{0.5}q_{64.5}$ [2 pkt]
   - ${}_{1.5}p_{64.5}$ [3 pkt]

   wenn $q_{64} = 0.009$ und $q_{65} = 0.01$.

4. (a) Sei K_x die gestutzte Restlebenszeit. Erläutern Sie im Detail, welche Versicherung den Barwert der folgenden Form hat:

$$\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}$$

[1 pkt]

   (b) Mit welchem Symbol wird die Nettoeinmalprämie dieser Versicherung üblicherweise dargestellt? [1 pkt]

   (c) Falls $x = 50$, T_0 gleichverteilt auf $[0, 100]$, $i = 0.02$ berechnen Sie die Nettoeinmalprämie dieser Versicherung. [2 pkt]

   Hinweise:

   1. $\sum_{j=0}^{n} v^j \cdot (1 + j) = \frac{1-v^{n+1}}{(1-v)^2} - (n + 1)\frac{v^{n+1}}{1-v}$.

   2. Die Gleichverteilung auf $[a, b]$ mit $a < b$ hat die Dichte $f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{\{x\in[a,b]\}}$.

   (d) Es gelten die Annahmen von (c). Die Prämien werden laufend in den ersten 10 Jahren bezahlt. Seien die Abschlusskosten durch 0.5 und 5% der ersten Prämie gegeben. Die weiteren Kosten betragen 1% der Prämien ab der zweiten Prämie. Berechnen Sie die ausreichende jährliche Prämie nach dem Äquivalenzprinzip und das ausreichende Deckungskapital für $t = 0$ und für $t = 1$. [4 pkt]

5. Betrachten Sie eine 30-jährige um 20 Jahre aufgeschobene Leibrente einer 40-jährigen Person. Die Versicherung wird durch jährliche Prämien, zahlbar vorschüssig über die Aufschubperiode, finanziert.

   (a) Geben Sie die prospektive und die retrospektive Darstellung für das Nettodeckungskapital dieser Versicherung an. [2 pkt]

   (b) In der Abbildung unten ist die jährliche Entwicklung des Nettodeckungskapitals für $i > 0$ dargestellt. Erklären Sie, so detailliert wie möglich, wie es zu diesem Verlauf kommt. [3 pkt]