Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Lebensversicherungsmathematik (Vorlesungsprüfung) September 2022 Univ.Prof. Rheinländer

Dauer: 90 Minuten

Unterlagen: ein nichtprogrammierer Taschenrechner ist erlaubt

---

Bsp.	Max.	Punkte
1	8	
2	8	
3	8	
4	8	
$\sum$	32	

Assistent: Aleksandar Arandjelović

Gesamtnote:

1. (a) Für gegebenes $x \geq 0$ und gegebene Sterbeintensität $\mu_x(t)$, $t > 0$, sei $q_x = 0.04$. Wenn die Sterbeintensität jedoch stets $\mu_x(t) + c$, $t > 0$, beträgt, wobei $c > 0$ eine Konstante ist, dann sei $q_x = 0.09$. Berechnen Sie c; [2 pkt]

   (b) Sei T_x die Restlebenszeit eines x-jährigen. Zeigen Sie: Ist μ_x eine in $x \geq 0$ monoton wachsende Funktion, dann ist $\mathbb{E}[T_x]$ monoton fallend in x; [2 pkt]

   (c) Die Gompertz–Makehamverteilung mit Parametern $\alpha, \beta, \lambda > 0$ ist gegeben durch

$$F(y) = 1 - \exp(-\lambda y - \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta y} - 1)), \quad y \geq 0.$$

   Zeigen Sie, dass F_x, also die Verteilung von T_x, im Modell von Gompertz–Makeham (d.h. wenn $\mu_{x+t} = A + Bc^{x+t}$ mit $A, B > 0$ und $c > 1$) eine Gompertz–Makehamverteilung besitzt; [2 pkt]

   (d) Sei nun $A = 5,202 \cdot 10^{-3}$, $B = 7,786 \cdot 10^{-6}$ sowie $c = 1,1181$. Berechnen Sie im Modell von Gompertz–Makeham die folgenden (bedingten) Wahrscheinlichkeiten:

      i. $\mathbb{P}(\{50 < T_{40} \leq 60\})$,
      ii. $\mathbb{P}(\{50 < T_{40} \leq 60\} \mid \{T_{40} > 50\})$; [2 pkt]

2. (a) Erläutern Sie, was zensierte Daten im Zusammenhang mit der Lebensversicherung sind. Der Nelson–Aalen sowie der Kaplan–Meier Schätzer sind nichtparametrische Schätzer in diesem Kontext. Welche Objekte werden hier geschätzt? Geben Sie eine Formel für jeden dieser beiden Schätzer an, und erklären Sie die darin vorkommenden Symbole. Sie brauchen diese Formeln nicht herzuleiten; [4 pkt]

   (b) Die Cox-Regression ist eine statistische Methode, um die Mortalitätsrate (Hazardrate) unter verschiedenen Einflussgrößen (Kovariaten) zu schätzen. Erläutern Sie diese Methode, und vergleichen Sie allgemein damit die geschätzte Mortalitätsrate von Raucher_innen und Nichtraucher_innen, indem Sie diese als Bruch schreiben. [4 pkt]

3. Betrachten Sie eine lebenslängliche Todesfallversicherung einer x-jährigen Person, welche über jährlich vorschüssige Prämienzahlungen finanziert wird und eine Summe von 1 am Ende des Todesjahres auszahlt. Es bezeichne L den Gesamtverlust des Versicherungsunternehmens, wenn die Prämie durch die Gleichung $\mathbb{E}[L] = M$ für $M < 1$ ermittelt wird. Weiters bezeichne $\tilde{L}$ den Gesamtverlust des Versicherungsunternehmens, wenn die Prämie durch die Gleichung $\mathbb{E}[L] = \tilde{M}$ für $\tilde{M} < 1$ bestimmt wird. Es gelte $\mathrm{Var}(L) = C > 0$.

   (a) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(\tilde{L})$ in Abhängigkeit von $M, \tilde{M}$ und C; [4 pkt]

   (b) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(\tilde{L})$ für $M = 0$, $\tilde{M} = -0.5$ und $C = 0.75$. [4 pkt]

4. Betrachten Sie eine gemischte Versicherung für eine 20-jährige Person mit einer Laufzeit von 40 Jahren. Die Versicherungssumme sei 100000 €. Gehen Sie von $i = 3\%$ aus.

   (a) Bestimmen Sie die Nettoeinmalprämie; [2 pkt]

   (b) Bestimmen Sie die jährliche Nettoprämie nach dem Äquivalenzprinzip, wenn Prämien vorschüssig bis zum Ende der Vertragslaufzeit gezahlt werden; [2 pkt]

   (c) Angenommen auf das Versicherungsunternehmen kommen Abschlusskosten der Höhe 50 € plus 10% der ersten Prämie zu. Die weiteren Kosten betragen 2% der Prämien ab dem zweiten Jahr und jährlich $0,1\%$ der Versicherungssumme für die gesamte Laufzeit. Die Prämienzahlungen sollen wieder vorschüssig jährlich stattfinden. Bestimmen Sie die Bruttoprämie nach dem Äquivalenzprinzip; [2 pkt]

   (d) Zerlegen Sie die Bruttoprämie aus Teil (c) in Nettoprämie P^{N}, α-Prämie P^{α}, β-Prämie P^{β}, γ-Prämie P^{γ} und berechnen Sie diese. [2 pkt]