

Lebensversicherungsmathematik

Wintersemester 2020/21

Klausur – 29.01.2021

1. Lebenszeit und Mortalitätsintensität (Total: 8 pkt)

- (a) Definieren Sie die Mortalitätsintensität μ_{x+t} eines x -jährigen zum Zeitpunkt $t \geq 0$, und leiten Sie einen Zusammenhang mit der Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_t p_x$ her. [2 pkt]
- (b) Sei T_x die Restlebenszeit eines x -jährigen. Zeigen Sie: Ist μ_x eine in $x \geq 0$ monoton wachsende Funktion, dann ist $\mathbb{E}[T_x]$ monoton fallend in x . [2 pkt]
- (c) Die Gompertz–Makeham-Verteilung mit Parametern $\alpha, \beta, \lambda > 0$ ist gegeben durch

$$F(y) = 1 - \exp\left(-\lambda y - \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta y} - 1)\right), \quad y \geq 0. \quad (1)$$

Zeigen Sie dass F_x , also die Verteilung von T_x , im Modell von Gompertz–Makeham (d.h. wenn $\mu_{x+t} = A + Bc^{x+t}$ mit $A, B > 0$ und $c > 1$) eine Gompertz–Makeham-Verteilung besitzt. [2 pkt]

- (d) Sei nun $A = 5,202 \cdot 10^{-3}$, $B = 7,786 \cdot 10^{-6}$ sowie $c = 1,1181$. Berechnen Sie im Modell von Gompertz–Makeham die folgenden (bedingten) Wahrscheinlichkeiten:
- (i) $\mathbb{P}(\{50 < T_{40} \leq 60\})$,
- (ii) $\mathbb{P}(\{50 < T_{40} \leq 60\} \mid \{T_{40} > 50\})$. [2 pkt]

2. Deckungskapital und Thiele'sche Differentialgleichung (Total: 8 pkt)

Ein stetiger Zahlungsstrom sei gegeben durch

$$dB_s = (\mu_{x+s}b_s - \pi_s) ds.$$

Hierbei sind b_s die Todesfalleistungen, π_s die Prämienraten und $T > 0$ die Vertragslaufzeit. Die prospektive Reserve (Deckungskapital) mit Zinsrate $\delta > 0$ ist definiert als

$$V_t = e^{\delta t} \int_t^T e^{-\delta s} dB_s, \quad t \in [0, T].$$

- (a) Formulieren Sie die Thiele'sche DGL mit allen Nebenbedingungen für V , und interpretieren Sie diese als eine Zerlegung in Spar- und Risikoprämie. [2 pkt]
- (b) Wie sieht die Thiele'sche DGL mit allen Nebenbedingungen aus, wenn noch die Erlebensfalleistung b_T hinzukommt? [2 pkt]
- (c) Geben Sie in beiden Fällen (also mit und ohne Erlebensfalleistung) das Eulerschema zur Lösung der DGL an. [2 pkt]
- (d) Eine 40-jährige Person schließt eine 20-jährige gemischte Versicherung ab. Die Erlebensfalleistung beträgt 20.000 €, und die Ablebensleistung beträgt 5.000 €. Die Zinsintensität sei konstant $\delta = 0,02$. Prämien werden kontinuierlich mit Intensität $\pi_t = 100$ über die gesamte Versicherungsdauer gezahlt. Es gelte das Mortalitätsmodell von Gompertz–Makeham mit $A = 5,202 \cdot 10^{-3}$, $B = 7,786 \cdot 10^{-6}$ sowie $c = 1,1181$. Berechnen Sie mit dem Eulerschema und Schrittweite $h = 0,05$ zwei Rekursionsschritte, i.e. berechnen Sie ${}_{19,95}V_{40}$ sowie ${}_{19,90}V_{40}$. [2 pkt]

3. Verbundene Leben (Total: 8 pkt)

Wir betrachten $m \in \mathbb{N}$ unabhängige Leben x_1, \dots, x_m . Der Zustand $u = x_1 : x_2 : \dots : x_m$ besteht, solange alle m Personen am Leben sind, und erlischt zur Zeit

$$T(u) = \min(T_1, \dots, T_m).$$

- (a) Definieren Sie eine Mortalitätsrate (MR) μ_{u+t} für den Zustand u mittels der MR der einzelnen Leben (x_k). [2 pkt]
- (b) Zeigen Sie, dass im Gompertz-Modell (d.h. wenn $\mu_{x+t} = Bc^{x+t}$ mit $B > 0$ und $c > 1$) die MR für den Zustand u identisch ist mit der MR einer einzelnen Person (w). [2 pkt]
- (c) Wie sieht die Situation im Modell von Gompertz–Makeham aus? [2 pkt]
- (d) Eine Ablebensversicherung zahlt 1 zum Zeitpunkt des zweiten Todes von (x) und (y). Außerdem wird 0,5 im Todeszeitpunkt ausbezahlt falls (x) vor (y) stirbt. Die Sterblichkeit folge dem Gesetz von Gompertz. Zeigen Sie, dass die Netto-Einmalprämie dieser Versicherung genau

$$\bar{A}_x + \bar{A}_y - \bar{A}_w(1 - 0,5c^{x-w}) \tag{2}$$

entspricht, wobei w implizit gegeben ist durch $c^w = c^x + c^y$. [2 pkt]

4. Deckungskapital und Prämien (Total: 8 pkt)

Betrachten Sie eine gemischte Versicherung für eine 30-jährige Person mit einer Laufzeit von 30 Jahren. Die Versicherungssumme sei 10.000 €. Die Auszahlung im Todesfall erfolgt am Jahresende. Gehen Sie dabei von $i = 2\%$ aus.

- (a) Bestimmen Sie die Nettoeinmalprämie. [1 pkt]
- (b) Bestimmen Sie die jährliche Nettoprämie nach dem Äquivalenzprinzip, wenn Prämien vorschüssig während der gesamten Vertragslaufzeit gezahlt werden. [1 pkt]
- (c) Angenommen auf das Versicherungsunternehmen kommen Abschlusskosten der Höhe 100 € plus 50% der ersten Prämie zu. Die weiteren Kosten betragen 2,5% der Prämien ab dem zweiten Jahr und jährlich vorschüssig 0,1% der Versicherungssumme für die gesamte Laufzeit. Die Prämienzahlungen sollen wieder vorschüssig jährlich während der gesamten Vertragslaufzeit stattfinden. Bestimmen Sie die Bruttoprämie nach dem Äquivalenzprinzip. [1 pkt]
- (d) Zerlegen Sie die Bruttoprämie in Nettoprämie P^N , α -Prämie P^α , β -Prämie P^β und γ -Prämie P^γ ; [2 pkt]
- (e) Bestimmen Sie ${}_5V_{30:30}^a$, also das ausreichende Deckungskapital fünf Jahre nach Vertragsabschluss; [2 pkt]
- (f) Bestimmen Sie $\lim_{t \searrow 0} {}_tV_{30:30}^a$. [1 pkt]

Beilage: Sterbetafel

x	l_x	d_x	x	l_x	d_x
0	100.000	356	51	96.356	301
1	99.644	23	52	96.055	332
2	99.621	18	53	95.723	365
3	99.602	14	54	95.358	401
4	99.588	11	55	94.956	441
5	99.577	9	56	94.515	485
6	99.569	7	57	94.031	533
7	99.561	7	58	93.498	584
8	99.555	7	59	92.914	639
9	99.548	7	60	92.275	696
10	99.541	7	61	91.579	755
11	99.533	8	62	90.824	814
12	99.525	10	63	90.011	873
13	99.516	12	64	89.138	931
14	99.504	16	65	88.207	990
15	99.488	21	66	87.217	1.047
16	99.467	27	67	86.170	1.109
17	99.440	34	68	85.061	1.177
18	99.406	41	69	83.883	1.251
19	99.365	47	70	82.632	1.334
20	99.319	51	71	81.298	1.429
21	99.268	52	72	79.869	1.536
22	99.216	52	73	78.333	1.659
23	99.164	50	74	76.674	1.798
24	99.113	49	75	74.876	1.954
25	99.065	48	76	72.922	2.129
26	99.017	47	77	70.792	2.326
27	98.970	47	78	68.466	2.543
28	98.923	47	79	65.924	2.774
29	98.877	47	80	63.149	3.016
30	98.830	48	81	60.133	3.260
31	98.782	50	82	56.874	3.499
32	98.732	52	83	53.375	3.717
33	98.680	55	84	49.658	3.902
34	98.625	58	85	45.755	4.050
35	98.567	62	86	41.705	4.151
36	98.505	67	87	37.553	4.206
37	98.438	71	88	33.347	4.195
38	98.367	77	89	29.152	4.109
39	98.290	83	90	25.043	3.942
40	98.207	91	91	21101	3694
41	98.115	101	92	17407	3374
42	98.014	113	93	14033	3000
43	97.901	126	94	11034	2587
44	97.775	142	95	8447	2163
45	97.633	159	96	6284	1751
46	97.474	178	97	4532	1368
47	97.295	199	98	3164	1030
48	97.096	222	99	2134	746
49	96.875	246	100	1389	1389

Beilage: Leibrententafel (Seite 1)

Alter	Zinsfuß											Alter
	0,00%	0,50%	1,00%	1,50%	2,00%	2,50%	3,00%	3,50%	4,00%	4,50%	5,00%	
0	81,177	66,569	55,473	46,933	40,277	35,02	30,818	27,415	24,629	22,32	20,387	0
1	80,463	66,133	55,214	46,789	40,205	34,996	30,822	27,438	24,662	22,359	20,429	1
2	79,482	65,473	54,769	46,487	39,999	34,854	30,724	27,369	24,614	22,325	20,405	2
3	78,496	64,808	54,316	46,177	39,786	34,706	30,621	27,297	24,563	22,289	20,379	3
4	77,507	64,136	53,857	45,862	39,567	34,554	30,514	27,222	24,509	22,25	20,351	4
5	76,516	63,459	53,392	45,54	39,343	34,396	30,403	27,142	24,452	22,209	20,321	5
6	75,522	62,776	52,92	45,211	39,113	34,234	30,287	27,06	24,392	22,165	20,289	6
7	74,528	62,09	52,443	44,878	38,878	34,068	30,168	26,974	24,33	22,12	20,254	7
8	73,533	61,399	51,961	44,539	38,639	33,897	30,045	26,885	24,265	22,071	20,219	8
9	72,538	60,706	51,474	44,195	38,394	33,721	29,919	26,792	24,197	22,021	20,181	9
10	71,543	60,008	50,983	43,846	38,145	33,542	29,788	26,697	24,126	21,969	20,141	10
11	70,548	59,308	50,486	43,492	37,89	33,358	29,654	26,598	24,053	21,914	20,1	11
12	69,553	58,604	49,985	43,133	37,631	33,169	29,516	26,497	23,977	21,857	20,057	12
13	68,56	57,898	49,48	42,769	37,367	32,977	29,375	26,391	23,899	21,797	20,011	13
14	67,568	57,189	48,97	42,401	37,099	32,78	29,229	26,283	23,817	21,736	19,964	14
15	66,579	56,479	48,458	42,028	36,827	32,58	29,081	26,172	23,734	21,672	19,916	15
16	65,592	55,768	47,942	41,653	36,551	32,376	28,929	26,059	23,648	21,607	19,866	16
17	64,61	55,057	47,425	41,274	36,272	32,169	28,775	25,943	23,561	21,54	19,814	17
18	63,632	54,346	46,905	40,892	35,99	31,959	28,618	25,825	23,471	21,472	19,762	18
19	62,657	53,634	46,383	40,507	35,704	31,746	28,458	25,704	23,379	21,402	19,708	19
20	61,686	52,922	45,858	40,118	35,415	31,53	28,295	25,581	23,286	21,33	19,652	20
21	60,717	52,208	45,33	39,725	35,121	31,309	28,128	25,454	23,189	21,256	19,595	21
22	59,749	51,492	44,797	39,327	34,822	31,083	27,957	25,323	23,088	21,179	19,535	22
23	58,78	50,771	44,258	38,922	34,516	30,852	27,78	25,188	22,984	21,098	19,472	23
24	57,809	50,045	43,713	38,511	34,204	30,613	27,598	25,047	22,875	21,013	19,406	24
25	56,837	49,315	43,162	38,092	33,885	30,369	27,409	24,901	22,761	20,924	19,335	25
26	55,864	48,58	42,604	37,666	33,559	30,117	27,215	24,75	22,643	20,83	19,261	26
27	54,89	47,84	42,04	37,234	33,226	29,859	27,014	24,593	22,519	20,732	19,184	27
28	53,915	47,097	41,47	36,795	32,886	29,595	26,807	24,43	22,39	20,63	19,102	28
29	52,94	46,349	40,893	36,349	32,539	29,324	26,594	24,261	22,256	20,523	19,016	29
30	51,965	45,597	40,312	35,896	32,185	29,045	26,374	24,087	22,117	20,411	18,926	30
31	50,99	44,842	39,724	35,437	31,824	28,761	26,148	23,906	21,973	20,295	18,831	31
32	50,015	44,083	39,131	34,971	31,456	28,469	25,915	23,72	21,822	20,173	18,732	32
33	49,041	43,322	38,532	34,499	31,082	28,17	25,676	23,528	21,667	20,046	18,628	33
34	48,067	42,557	37,929	34,02	30,7	27,865	25,431	23,329	21,505	19,915	18,52	34
35	47,095	41,789	37,32	33,535	30,312	27,553	25,178	23,124	21,338	19,777	18,407	35
36	46,124	41,019	36,707	33,044	29,917	27,234	24,92	22,913	21,165	19,635	18,289	36
37	45,155	40,246	36,088	32,547	29,516	26,908	24,654	22,695	20,986	19,486	18,166	37
38	44,187	39,471	35,465	32,043	29,107	26,575	24,381	22,471	20,8	19,332	18,037	38
39	43,221	38,694	34,836	31,533	28,692	26,235	24,101	22,24	20,608	19,172	17,903	39
40	42,256	37,914	34,204	31,018	28,269	25,888	23,815	22,002	20,41	19,006	17,763	40
41	41,295	37,134	33,567	30,496	27,841	25,534	23,521	21,757	20,205	18,834	17,618	41
42	40,336	36,352	32,927	29,97	27,406	25,173	23,221	21,506	19,994	18,656	17,467	42
43	39,382	35,57	32,283	29,438	26,965	24,806	22,914	21,248	19,777	18,472	17,31	43
44	38,432	34,787	31,637	28,902	26,519	24,433	22,6	20,984	19,553	18,281	17,147	44
45	37,486	34,006	30,988	28,362	26,067	24,053	22,281	20,713	19,323	18,085	16,979	45
46	36,546	33,225	30,338	27,818	25,61	23,668	21,955	20,437	19,087	17,883	16,806	46
47	35,611	32,445	29,685	27,27	25,148	23,278	21,623	20,154	18,845	17,675	16,627	47
48	34,682	31,667	29,031	26,718	24,682	22,881	21,285	19,865	18,597	17,462	16,441	48
49	33,759	30,891	28,377	26,164	24,21	22,48	20,941	19,57	18,343	17,242	16,251	49
50	32,842	30,117	27,721	25,607	23,735	22,073	20,592	19,269	18,082	17,016	16,054	50

Beilage: Leibrententafel (Seite 2)

Alter	Zinsfuß											Alter
	0,00%	0,50%	1,00%	1,50%	2,00%	2,50%	3,00%	3,50%	4,00%	4,50%	5,00%	
51	31,932	29,346	27,064	25,046	23,255	21,661	20,237	18,962	17,816	16,784	15,851	51
52	31,029	28,577	26,408	24,484	22,772	21,244	19,876	18,649	17,543	16,546	15,643	52
53	30,133	27,811	25,751	23,918	22,284	20,822	19,51	18,33	17,265	16,302	15,428	53
54	29,245	27,048	25,094	23,351	21,793	20,395	19,138	18,005	16,98	16,052	15,208	54
55	28,364	26,289	24,438	22,782	21,298	19,964	18,761	17,674	16,69	15,795	14,981	55
56	27,492	25,534	23,782	22,212	20,801	19,529	18,379	17,338	16,393	15,533	14,749	56
57	26,628	24,783	23,129	21,641	20,301	19,09	17,993	16,998	16,092	15,266	14,511	57
58	25,774	24,038	22,478	21,07	19,799	18,648	17,603	16,652	15,785	14,992	14,267	58
59	24,93	23,299	21,829	20,5	19,296	18,203	17,208	16,301	15,473	14,714	14,018	59
60	24,096	22,566	21,183	19,929	18,791	17,755	16,81	15,947	15,156	14,43	13,763	60
61	23,271	21,838	20,539	19,359	18,284	17,304	16,408	15,587	14,834	14,141	13,503	61
62	22,456	21,117	19,899	18,789	17,777	16,851	16,002	15,223	14,507	13,847	13,238	62
63	21,65	20,4	19,26	18,219	17,267	16,394	15,592	14,854	14,174	13,546	12,966	63
64	20,853	19,688	18,623	17,649	16,755	15,933	15,177	14,479	13,835	13,239	12,687	64
65	20,062	18,98	17,988	17,077	16,239	15,468	14,756	14,099	13,49	12,925	12,401	65
66	19,278	18,275	17,352	16,503	15,721	14,998	14,33	13,711	13,137	12,603	12,107	66
67	18,501	17,572	16,716	15,927	15,198	14,522	13,897	13,316	12,775	12,273	11,804	67
68	17,729	16,872	16,081	15,348	14,67	14,041	13,457	12,913	12,406	11,934	11,492	68
69	16,964	16,175	15,445	14,768	14,139	13,555	13,01	12,503	12,029	11,586	11,171	69
70	16,205	15,482	14,81	14,186	13,605	13,064	12,558	12,086	11,644	11,23	10,841	70
71	15,455	14,793	14,178	13,604	13,068	12,568	12,1	11,662	11,251	10,866	10,503	71
72	14,714	14,11	13,547	13,022	12,53	12,069	11,638	11,233	10,852	10,494	10,157	72
73	13,982	13,434	12,921	12,441	11,991	11,569	11,172	10,798	10,447	10,116	9,803	73
74	13,263	12,767	12,301	11,864	11,453	11,067	10,704	10,361	10,037	9,732	9,443	74
75	12,558	12,109	11,688	11,292	10,919	10,567	10,235	9,921	9,625	9,344	9,078	75
76	11,868	11,464	11,084	10,726	10,388	10,069	9,767	9,481	9,21	8,953	8,71	76
77	11,194	10,833	10,492	10,169	9,864	9,575	9,301	9,042	8,795	8,561	8,339	77
78	10,541	10,218	9,912	9,623	9,348	9,088	8,841	8,606	8,382	8,17	7,967	78
79	9,909	9,621	9,348	9,09	8,844	8,61	8,387	8,176	7,974	7,781	7,598	79
80	9,3	9,045	8,802	8,572	8,352	8,143	7,943	7,753	7,571	7,398	7,232	80
81	8,716	8,491	8,276	8,071	7,875	7,689	7,51	7,34	7,177	7,021	6,872	81
82	8,159	7,96	7,77	7,588	7,415	7,249	7,09	6,938	6,792	6,653	6,519	82
83	7,628	7,453	7,286	7,125	6,972	6,825	6,684	6,549	6,419	6,294	6,175	83
84	7,124	6,971	6,824	6,683	6,547	6,417	6,293	6,173	6,058	5,947	5,84	84
85	6,646	6,512	6,383	6,26	6,141	6,026	5,916	5,81	5,708	5,61	5,515	85
86	6,195	6,078	5,965	5,857	5,753	5,652	5,556	5,462	5,372	5,286	5,202	86
87	5,769	5,667	5,569	5,475	5,384	5,296	5,211	5,129	5,05	4,973	4,899	87
88	5,371	5,282	5,197	5,115	5,036	4,959	4,885	4,813	4,743	4,676	4,611	88
89	5	4,923	4,849	4,778	4,709	4,642	4,577	4,514	4,453	4,394	4,337	89
90	4,656	4,59	4,526	4,464	4,403	4,345	4,289	4,234	4,181	4,129	4,079	90
91	4,339	4,282	4,226	4,172	4,12	4,069	4,02	3,972	3,926	3,881	3,837	91
92	4,047	3,998	3,95	3,903	3,858	3,814	3,771	3,729	3,689	3,649	3,611	92
93	3,78	3,737	3,696	3,655	3,616	3,577	3,54	3,504	3,468	3,434	3,4	93
94	3,536	3,499	3,463	3,428	3,393	3,36	3,328	3,296	3,265	3,235	3,205	94
95	3,312	3,28	3,249	3,218	3,189	3,16	3,131	3,104	3,077	3,051	3,025	95
96	3,108	3,081	3,053	3,027	3,001	2,976	2,951	2,927	2,903	2,88	2,858	96
97	2,923	2,899	2,875	2,852	2,83	2,808	2,786	2,765	2,745	2,724	2,705	97
98	2,754	2,733	2,713	2,693	2,673	2,654	2,635	2,617	2,599	2,581	2,564	98
99	2,601	2,583	2,565	2,547	2,53	2,513	2,497	2,481	2,465	2,45	2,434	99
100	2,461	2,445	2,429	2,414	2,399	2,384	2,37	2,356	2,342	2,328	2,315	100