

Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Lebensversicherungsmathematik
(Vorlesungsprüfung)
25. September 2020
Univ.Prof. Rheinländer

Dauer: 90 Minuten

Unterlagen: ein beidseitig handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im FAM-office,
Sandra Trenovatz, Tel. 01-58801-10511,
e-mail: fam@fam.tuwien.ac.at

Bsp.	Max.	Punkte
1	6	
2	6	
3	5	
4	6	
Σ	23	

Schriftlich:

Assistent:
Dragana Radojčić

Mündlich:

Gesamtnote:

1. Rechnen Sie dieses Beispiel ohne Sterbe- oder Leibrententafeln.

(6 Pkt.)

- (a) Sei T_x exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, d.h. die Verteilungsfunktion von T_x ist gegeben durch $F(y) = 1 - \exp(-\lambda y)$, $y \geq 0$. Weiters sei eine positive Zinsintensität δ gegeben. Zeigen Sie

$$\bar{A}_x = \frac{\lambda}{\lambda + \delta}.$$

- (b) Gegeben sind zwei Zufallsvariablen T_x und T_y , die die Restlebenszeit von zwei Personen im Alter x bzw. Alter y modellieren. Die gemeinsame Dichte von T_x und T_y sei gegeben durch

$$f_{T_x, T_y}(s, t) = \frac{2}{45} 20^{-4} \cdot (9 \cdot 20^2 - (3s - t)^2), \quad \text{falls } s \in [0, 20] \text{ und } t \in [0, 60],$$

und 0 sonst. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die y -jährige Person vor der x -jährigen Person stirbt.

- (c) Betrachten Sie eine ewige Ablebensversicherung an eine x -jährige Person, $x \geq 0$. Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bezeichne P_k die Höhe der jährlichen, vorschüssigen Prämie nach dem Äquivalenzprinzip, wenn die Prämien nur in den ersten k Jahren gezahlt werden. Zeigen Sie allgemein, dass $P_k \geq P_{k+1}$ gilt.

2. Verwenden Sie für dieses Beispiel die Werte aus Tabelle 1: es handelt sich dabei um eine Selektionstafel mit Selektionsdauer $d = 3$. Gehen Sie von $r = 3\%$ und einem Höchstalter von 46 aus.

(6 Pkt.)

$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	$l_{[x]+2}$	l_{x+3}
40	2000	1800	1500	1100
41	1700	1600	1200	750
42	1500	1400	900	400
43	700	500	300	100

Tabelle 1:

- (a) Bestimmen Sie ${}_{2|1}q_{[40]+2}$ und $A_{[42]+1}$.
- (b) Eine 41-jährige selektierte Person erwirbt eine gemischte Versicherung mit Laufzeit $n = 4$ und Versicherungssumme $S = 100 \text{ €}$. Prämien werden zweimal gezahlt: einmal zu Vertragsbeginn und einmal genau zwei Jahre nach Vertragsabschluss (natürlich nur, wenn der Versicherungsnehmer dann noch am Leben ist). Die Prämienhöhe P wird nach dem Äquivalenzprinzip bestimmt. Bestimmen Sie P und das Nettodeckungskapital zwei Jahre nach Vertragsabschluss.

3. (a) Berechnen Sie die Nettoeinmalprämie einer vorschüssigen, jährlich um den Betrag Eins steigenden Leibrente. (5 Pkt.)
- (b) Berechnen Sie die Nettoeinmalprämie einer stetig ausbezahlten Leibrente, mit Rate Eins.

Hinweis: Für beide Teile können Sie den Satz von Fubini benutzen; für Teil a) die diskrete, für Teil b) die stetige Version.

4. (a) Erläutern Sie, was zensierte Daten im Zusammenhang mit der Lebensversicherung sind. Der Nelson-Aalen sowie der Kaplan-Meier Schätzer sind nichtparametrische Schätzer in diesem Kontext. Welche Objekte werden hier geschätzt? Geben Sie eine Formel für jeden dieser beiden Schätzer an, und erklären Sie die darin vorkommenden Symbole. Sie brauchen diese Formeln nicht herzuleiten. (6 Pkt.)
- (b) Die Cox-Regression ist eine statistische Methode, um die Mortalitätsrate (Hazardrate) unter verschiedenen Einflussgrößen (Kovariaten) zu schätzen. Erläutern Sie diese Methode, und vergleichen Sie allgemein damit die geschätzte Mortalitätsrate von Raucher_innen und Nichtraucher_innen, indem Sie diese als Bruch schreiben.