Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

# Lebensversicherungsmathematik
# (Vorlesungsprüfung)
# 7. August 2020
# Univ.Prof. Rheinländer

Dauer: 90 Minuten

Unterlagen: ein nichtprogrammierer Taschenrechner ist erlaubt

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im FAM-office,
Sandra Trenovatz, Tel. 01-58801-10511,
e-mail: `fam@fam.tuwien.ac.at`

---

| Bsp. | Max. | Punkte |
|---|---|---|
| 1 | 8 | |
| 2 | 8 | |
| 3 | 8 | |
| 4 | 8 | |
| $\sum$ | 32 | |

Assistent:
Dragana Radojičić

**Gesamtnote:**

1. Rechnen Sie dieses Beispiel ohne Sterbe- oder Leibrententafeln. (8 Pkt.)

   (a) Zeigen Sie

   $$ {}_np_x d\ddot{a}_{\overline{n}|} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - v^{k+1}\right) {}_kp_x q_{x+k} = 1 - A_{x:\overline{n}|}, \quad x, n \in \mathbb{N}. $$

   (b) Es sei $T_0$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, d.h. die Verteilungsfunktion von $T_0$ ist gegeben durch

   $$ F_0(y) = \big(1 - \exp(-\lambda y)\big) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y), \quad y \in \mathbb{R}. $$

   Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_x$ von $T_x$ und $\mathbb{E}[T_x]$ für alle $x \geq 0$.

   (c) Betrachten Sie eine ewige Ablebensversicherung an eine $x$-jährige Person,$x \geq 0$. Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bezeichne $P_k$ die Höhe der jährlichen, vorschüssigen Prämie nach dem Äquivalenzprinzip, wenn die Prämien nur in den ersten $k$ Jahren gezahlt werden. Zeigen Sie allgemein, dass $P_k \geq P_{k+1}$ gilt.

   (d) Sei $T_x$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, d.h. die Verteilungsfunktion von $T_x$ ist gegeben durch $F(y) = 1 - \exp(-\lambda y), y \geq 0$. Weiters sei eine positive Zinsintensität $\delta$ gegeben. Zeigen Sie

   $$ \overline{A}_x = \frac{\lambda}{\lambda + \delta}. $$

2. Verwenden Sie für dieses Beispiel die Werte aus Tabelle 1. Gehen Sie von $r = 1\%$ und einem Höchstalter von 52 aus. (8 Pkt.)

| $x$ | $l_x$ |
|---|---|
| 49 | 1700 |
| 50 | 1500 |
| 51 | 1100 |
| 52 | 700 |

Tabelle 1: Toy-Sterbetafel

   (a) Verwenden Sie Kommutationszahlen, um $\ddot{a}_{49:\overline{2}|}$ zu berechnen.

   (b) Sei $x = 50$. Verwenden Sie Annahme A (Annahme A1 und Annahme A2) um die Verteilungsfunktion $t \mapsto F_x(t)$ von $T_x$ zu bestimmen (für alle $t \in \mathbb{R}$ !).

   (c) Sei $x = 50,5$. Verwenden Sie Annahme B, um die Verteilungsfunktion $t \mapsto F_x(t)$ von $T_x$ zu bestimmen (für alle $t \in \mathbb{R}$ !).

   (d) Eine 49-jährige Person A und eine 50-jährige Person B kaufen eine ewige Ablebensversicherung, die am Ende des Todesjahres von B 700 € ausgezahlt, falls A dann noch am Leben ist. Ist A am Ende des Todesjahres von B nicht mehr am Leben, wird nichts ausbezahlt. Unter der Annahme, dass die Restlebenszeiten beider Personen unabhängig sind, berechnen Sie die NEP dieser Versicherung.

   *Hinweis zu (b) und (c)*: Machen Sie Fallunterscheidungen! Sei $T_x$ die Restlebenszeit einer $x$-jährigen Person, $K_x = \lfloor T_x \rfloor$ und $S_x = T_x - K_x$. Oft werden Annahmen über die Verteilung von $K_x$ und $S_x$ getroffen:

- Annahme A1: für $x \in \mathbb{N}$ ist $S_x$ unabhängig von $K_x$ und $S_x$ ist gleichverteilt im Intervall $[0,1)$.
- Annahme A2: für $x \in \mathbb{N}$ und $s \in [0,1)$ ist ${}_sq_x = sq_x$.
- Annahme B: für $x \in \mathbb{N}$ und $s \in [0,1)$ ist $s \mapsto \mu_{x+s}$ konstant.

3. (a) Berechnen Sie die Nettoeinmalprämie einer vorschüssigen, jährlich um den Betrag Eins steigenden Leibrente. (8 Pkt.)

   (b) Berechnen Sie die Nettoeinmalprämie einer stetig ausbezahlten Leibrente, mit Rate Eins.

   Hinweis: Für beide Teile können Sie den Satz von Fubini benutzen; für Teil a) die diskrete, für Teil b) die stetige Version.

4. (a) Erläutern Sie, was zensierte Daten im Zusammenhang mit der Lebensversicherung sind. Der Nelson-Aalen sowie der Kaplan-Meier Schätzer sind nichtparametrische Schätzer in diesem Kontext. Welche Objekte werden hier geschätzt? Geben Sie eine Formel für jeden dieser beiden Schätzer an, und erklären Sie die darin vorkommenden Symbole. Sie brauchen diese Formeln nicht herzuleiten. (8 Pkt.)

   (b) b) Die Cox-Regression ist eine statistische Methode, um die Mortalitätsrate (Hazardrate) unter verschiedenen Einflussgrössen (Kovariaten) zu schätzen. Erläutern Sie diese Methode, und vergleichen Sie allgemein damit die geschätzte Mortalitätsrate von Raucher_innen und Nichtraucher_innen, indem Sie diese als Bruch schreiben.