Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Lebensversicherungsmathematik
(Vorlesungsprüfung)
29. Januar 2020
Univ.Prof. Rheinländer

Dauer: 90 Minuten

Unterlagen: ein nichtprogrammierer Taschenrechner ist erlaubt

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im FAM-office,
Sandra Trenovatz, Tel. 01-58801-10511,
e-mail: `fam@fam.tuwien.ac.at`

Bsp.	Max.	Punkte
1	8	
2	8	
3	8	
4	8	
$\sum$	32	

Assistent:
Dragana Radojičić

Gesamtnote:

1. Lösen Sir folgende Aufgaben: (8 Pkt.)

   (a) Für gegebenes $x > 0$ und gegebene Sterbeintensität μ_{x+t} sei $q_x = 0.04$. Wenn die Sterbeintensität jedoch stets $\mu_{x+t} + c$ wäre, dann ist $q_x = 0.09$. Berechnen Sie c.

   (b) Die Gompertz-Makehamverteilung mit Parametern $\alpha, \beta, \lambda > 0$ ist gegeben durch $F(y) = 1 - exp(-\lambda y - \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta y} - 1))$, für alle $y \geq 0$. Zeigen Sie, dass F_x im Modell von Gompertz-Makeham (d.h. wenn $\mu_{x+t} = A + Bc^{x+t}$ mit $A, B > 0$ und $c > 1$) eine Gompertz-Makehamverteilung besitzt.

   (c) Betrachten Sie eine ewige Ablebensversicherung an eine x-jährige Person,$x \geq 0$. Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bezeichne P_k die Höhe der jährlichen, vorschüssigen Prämie nach dem Äquivalenzprinzip, wenn die Prämien nur in den ersten k Jahren gezahlt werden. Zeigen Sie allgemein, dass $P_k \geq P_{k+1}$ gilt.

   (d) Zeigen Sie

$$1 - \frac{P_{30:\overline{15}|}\ddot{a}_{30:\overline{15}|} - A_{30}}{v^{15}{}_{15}p_{30}} = A_{45},$$

   wobei $P_{30:\overline{15}|}$ die jährliche vorschüssige Prämie für eine gemischte Versicherung mit Barwert $A_{30:\overline{15}|}$ bezeichnet.

2. Verwenden Sie die beigelegte Sterbetafel 2010/2012 und die dazugehörige Leibrententafel 2010/2012 um folgende Aufgabe zu lösen. (8 Pkt.)

   (a) Eine 49-jährige Person schließt eine temporäre Ablebensversicherung mit einer Laufzeit von 20 Jahren ab, die aber um 10 Jahre aufgeschoben ist. Die Summe von 130.000 € wird am Ende des Todesjahres ausbezahlt. Bestimmen Sie die jährlichen Prämien nach dem Äquivalenzprinzip, wenn Prämien über die gesamte Laufzeit vorschüssig gezahlt werden.

   (b) Bestimmen Sie das Nettodeckungskapital 13 Jahre nach Vertragsbeginn.

   (c) Die Kosten für die obige Versicherung betragen einmalig 230 € plus 15% der Prämie im ersten Jahr und 8% der Prämie ab dem 1. Jahr.

   (d) Bestimmen Sie das Bruttodeckungskapital 3 Jahre nach Vertragsbeginn.

3. Die Mortalitätsintensität μ_{x+t} eines x-jährigen zum Zeitpunkt t ist definiert durch (8 Pkt.)

$$\mu_{x+t} := \lim_{\Delta \to 0} \frac{\mathbb{P}(t < T \leq t + \Delta | T > t)}{\Delta} \tag{1}$$

   Zeigen Sie, dass für die Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_tp_x$ eines x-jährigen gilt:

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$$

   Begründen Sie jeden ihrer einzelnen Schritte.

4. (a) Wir nehmen an, daß Todesfälle zu den Zeitpunkten $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots$ auftreten. Es bezeichne d_i die Anzahl der Todesfälle bei t_i, c_i die Anzahl der zensierten Leben (d.h. Ausscheiden aus der Beobachtungsreihe ohne Todesfall). Weiter sei (8 Pkt.)

$$P\left(\text{Tod bei } t_i \middle| \text{ überlebt bis } t_i-\right) = h_i.$$

Dann ist

$$S(t_i) = 1 - F(t_i) = \prod_{j=1}^{i} (1 - h_j),$$

$$f(t_i) = h_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - h_j).$$

Bestimmen Sie den Kaplan-Meier Schätzer für die Überlebenswahrscheinlichkeit mittels der Maximum-Likelihood Methode.

(b) Folgende zensierte Beobachtungen von Ausscheidezeitpunkten seien gegeben:

$$1; 4+; 5; 5; 6; 7; 7+; 7+; 8; 8; 8; 10; 10+; 10+; 10+;$$

wobei „+“ ein zensiertes Leben bezeichnet (d.h. Ausscheiden aus der Beobachtungsreihe ohne Todesfall). Bestimmen Sie den Kaplan-Meier Schätzer $\hat{S}(t_i)$ für alle t_i.