Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Lebensversicherungsmathematik
(Vorlesungsprüfung)
3. Mai 2019
Univ.Prof. Rheinländer

Dauer: 90 Minuten

Unterlagen: ein beidseitig handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im FAM-office,
Sandra Trenovatz, Tel. 01-58801-10511,
e-mail: fam@fam.tuwien.ac.at

Bsp.	Max.	Punkte
1	6	
2	5	
3	8	
4	5	
$\sum$	24	

Schriftlich:

Assistent:
Dragana Radojičić

Mündlich:

Gesamtnote:

1. Rechnen Sie dieses Beispiel ohne Sterbe- oder Leibrententafeln. (6 Pkt.)

   (a) Zeigen Sie

$$ {}_np_x d\ddot{a}_{\overline{n}|} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - v^{k+1}\right) {}_kp_x q_{x+k} = 1 - A_{x:\overline{n}|}, \quad x, n \in \mathbb{N}. $$

   (b) Gegeben sei

$$ {}_tp_x = \frac{100 - x - t}{100 - x}, \quad 0 \le x < 100, \quad 0 \le t \le 100 - x. $$

   Berechnen Sie μ_{45} and $\mathring{e}_{45}$.

   (c) Gegeben sind zwei Zufallsvariablen T_x und T_y, die die Restlebenszeit von zwei Personen im Alter x bzw. Alter y modellieren. Die gemeinsame Dichte von T_x und T_y sei gegeben durch

$$ f(s,t) = C \cdot \left(50^2 - (s-t)^2\right), \quad \text{falls } s \in [0,50] \text{ und } t \in [0,50], $$

   und 0 sonst (Achtung: T_x und T_y sind nicht unabhängig). Hier ist $C > 0$ eine Normierungskonstante. Bestimmen Sie C.

2. Folgende zensierte Beobachtungen von Ausscheidezeitpunkten (so wie in der Vorlesung) seien gegeben: (5 Pkt.)

$$ 1; 4+; 5; 5; 6; 7; 7+; 7+; 8; 8; 8; 10; 10+; 10+; 10+; $$

   wobei „+“ ein zensiertes Leben bezeichnet (d.h. Ausscheiden aus der Beobachtungsreihe ohne Todesfall).

   (a) Bestimmen Sie den Kaplan-Meier Schätzer $\hat{S}(t_i)$ für alle t_i.

   (b) Bestimmen Sie den Schätzer $\widetilde{S}(t_i)$ für alle t_i.

   Skizzieren Sie die Funktionen $t \mapsto \hat{S}(t)$ und $t \mapsto \widetilde{S}(t)$.

   Hinweis: $\widetilde{S}(t) = \exp(-\Lambda(t))$, wobei $\Lambda(t)$ ist Nelson-Aalen.

3. Eine x-jährige Person schließt eine n-jährige gemischte Versicherung mit Versicherungssumme S Euro ab. Die Prämien werden jährlich vorschüssig bezahlt. Weiters fallen anfängliche Kosten in der Höhe von 2% der Versicherungssumme plus 10% der ersten Prämie an. Laufende Kosten betragen 1% der Prämie ab dem zweiten Jahr. Im Todesfall während der ersten n Jahre wird die Summe am Ende des Todesjahres ausbezahlt, ansonsten nach Ablauf der n Jahre. Der Zinssatz sei i. (8 Pkt.)

   (a) i. Geben Sie eine Formel für den Verlust (inklusive Kosten) L des Versicherers an.

      ii. Geben Sie eine Formel für die jährliche Bruttoprämie nach dem Äquivalenzprinzip an. Drücken Sie alle vorkommenden Größen mit Hilfe von Variablen aus, die in der Sterbetafel vorkommen.

      iii. Geben Sie eine Formel für die Standardabweichung von L mit Hilfe von L_k an, wobei L_k den Verlust für $K_x = k$ bezeichnet.

   (b) Betrachten Sie folgende Ablebensversicherung: Versicherungssumme S. Dauer n. Anfangsalter x und Zinssatz i. Die Abschlusskosten seien K und die Prämie wird in Form einer Einmalprämie bezahlt.

      i. Geben Sie eine Formel für den Verlust (inklusive Kosten) L des Versicherers an.

      ii. Geben Sie eine Formel für die Bruttoprämie nach dem Äquivalenzprinzip an. Drücken Sie alle vorkommenden Größen mit Hilfe von Variablen aus, die in der Sterbetafel vorkommen.

      iii. Geben Sie eine Formel für das ausreichende Deckungskapital zum Zeitpunkt $k < n$ an. Nimmt das Deckungskapital immer positive Werte an?

4. Rechnen Sie dieses Beispiel ohne Sterbe- oder Leibrententafeln. (5 Pkt.)

   (a) Zeigen Sie

$$1 - \frac{P_{30:\overline{15}|}\ddot{a}_{30:\overline{15}|} - A_{30}}{v^{15}{}_{15}p_{30}} = A_{45},$$

   wobei $P_{30:\overline{15}|}$ die jährliche vorschüssige Prämie für eine gemischte Versicherung mit Barwert $A_{30:\overline{15}|}$ bezeichnet.

   (b) Sei T_x exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, d.h. die Verteilungsfunktion von T_x ist gegeben durch $F(y) = 1 - \exp(-\lambda y), y \geq 0$. Weiters sei eine positive Zinsintensität δ gegeben. Zeigen Sie

$$\overline{A}_x = \frac{\lambda}{\lambda + \delta}.$$