Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Lebensversicherungsmathematik
(Vorlesungsprüfung)
24. September 2018
Univ.Prof. Rheinländer

Dauer: 90 Minuten

Unterlagen: ein beidseitig handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im FAM-office,
Sandra Trenovatz, Tel. 01-58801-10511,
e-mail: `fam@fam.tuwien.ac.at`

Bsp.	Max.	Punkte
1	6	
2	5	
3	4	
4	8	
$\sum$	23	

Schriftlich:

Assistent:
Dragana Radojičić

Mündlich:

Gesamtnote:

1. Rechnen Sie dieses Beispiel ohne Sterbe- oder Leibrententafeln. (6 Pkt.)

   (a) Wie hoch muss der Zinssatz r mindestens sein, damit Sie sich mit 320 € eine ewige vorschüssige Zeitrente kaufen können, die monatlich 1 € ausbezahlt.

   (b) Zeigen Sie folgende Rechenregel mit Hilfe von bedingten Wahrscheinlichkeiten:

   $$ {}_kp_x \; {}_tp_{x+k} = {}_{k+t}p_x, \quad k, t, x \geq 0. $$

   (c) Betrachten Sie eine ewige Ablebensversicherung an eine x-jährige Person, $x \geq 0$. Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bezeichne P_k die Höhe der jährlichen, vorschüssigen Prämie nach dem Äquivalenzprinzip, wenn die Prämien nur in den ersten k Jahren gezahlt werden. Zeigen Sie allgemein, dass $P_k \geq P_{k+1}$ gilt.

2. Folgende zensierte Beobachtungen von Ausscheidezeitpunkten (so wie in der Vorlesung) seien gegeben: (5 Pkt.)

   $$1; 4+; 5; 5; 6; 7; 7+; 7+; 8; 8; 8; 10; 10+; 10+; 10+;$$

   wobei „+“ ein zensiertes Leben bezeichnet (d.h. Ausscheiden aus der Beobachtungsreihe ohne Todesfall).

   (a) Bestimmen Sie den Kaplan-Meier Schätzer $\hat{S}(t_i)$ für alle t_i.

   (b) Bestimmen Sie den Schätzer $\widetilde{S}(t_i)$ für alle t_i.

   Skizzieren Sie die Funktionen $t \mapsto \hat{S}(t)$ und $t \mapsto \widetilde{S}(t)$.

   Hinweis: $\widetilde{S}(t) = \exp(-\Lambda(t))$, wobei $\Lambda(t)$ der Nelson-Aalen Schätzer ist.

3. Rechnen Sie dieses Beispiel ohne Sterbe- oder Leibrententafeln. (4 Pkt.)

   (a) Zeigen Sie

   $$ {}_np_x d\ddot{a}_{\overline{n}|} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - v^{k+1}\right) {}_kp_x q_{x+k} = 1 - A_{x:\overline{n}|}, \quad x, n \in \mathbb{N}. $$

   (b) Sei T_x exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, d.h. die Verteilungsfunktion von T_x ist gegeben durch $F(y) = 1 - \exp(-\lambda y), y \geq 0$. Weiters sei eine positive Zinsintensität δ gegeben. Zeigen Sie

   $$ \overline{A}_x = \frac{\lambda}{\lambda + \delta}. $$

Sei T_x die Restlebenszeit einer x-jährigen Person, $K_x = \lfloor T_x \rfloor$ und $S_x = T_x - K_x$. Oft werden Annahmen über die Verteilung von K_x und S_x getroffen:

- Annahme A1: für $x \in \mathbb{N}$ ist S_x unabhängig von K_x, und S_x ist gleichverteilt im Intervall $[0, 1)$.
- Annahme A2: für $x \in \mathbb{N}$ und $s \in [0, 1)$ ist ${}_sq_x = sq_x$.
- Annahme B: für $x \in \mathbb{N}$ und $s \in [0, 1)$ ist $s \mapsto \mu_{x+s}$ konstant.

4. Verwenden Sie für dieses Beispiel die Werte aus Tabelle 1. Gehen Sie von $r = 1\%$ und einem Höchstalter von 52 aus. (8 Pkt.)

x	l_x
49	1700
50	1500
51	1100
52	700

Tabelle 1: Toy-Sterbetafel

(a) Verwenden Sie Kommutationszahlen um $\ddot{a}_{49:\overline{2}|}$ zu berechnen.

(b) Sei $x = 50$. Verwenden Sie Annahme A (Annahme A1 und Annahme A2) um die Verteilungsfunktion $t \mapsto F_x(t)$ von T_x zu bestimmen (für alle $t \in \mathbb{R}$!).

(c) Sei $x = 50,5$. Verwenden Sie Annahme B um die Verteilungsfunktion $t \mapsto F_x(t)$ von T_x zu bestimmen (für alle $t \in \mathbb{R}$!).

(d) Eine 49-jährige Person P_1 und eine 50-jährige Person P_2 kaufen eine ewige Ablebensversicherung, die am Ende des Todesjahres von P_2 700 € ausgezahlt, falls P_1 dann noch am Leben ist. Ist P_1 am Ende des Todesjahres von P_2 nicht mehr am Leben, wird nichts ausbezahlt. Unter der Annahme, dass die Restlebenszeiten beider Personen unabhängig sind, berechnen Sie die NEP dieser Versicherung.

Hinweis zu (b) und (c): Machen Sie Fallunterscheidungen!