Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Lebensversicherungsmathematik (Vorlesungsprüfung) 13. Mai 2016 Univ.Prof. Rheinländer

Dauer: 90 Minuten

Unterlagen: ein beidseitig handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im FAM-office,
Sandra Trenovatz, Tel. 01-58801-10511,
e-mail: fam@fam.tuwien.ac.at

Bsp.	Max.	Punkte
1	8	
2	8	
3	8	
$\sum$	24	

Schriftlich:

Assistent:
Cetin Gülüm

Mündlich:

Gesamtnote:

1. Verwenden Sie für dieses Beispiel die Werte aus Tabelle 1: es handelt sich dabei um eine Selektionstafel mit Selektionsdauer $d = 3$. Gehen Sie von $r = 3\%$ und einem Höchstalter von 46 aus.

$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	$l_{[x]+2}$	l_{x+3}
40	2000	1800	1500	1100
41	1700	1600	1200	750
42	1500	1400	900	400
43	700	500	300	100

Tabelle 1:

   (a) Bestimmen Sie ${}_{2|1}q_{[40]+2}$ und $A_{[42]+1}$.

   (b) Eine 41-jährige selektierte Person erwirbt eine gemischte Versicherung mit Laufzeit $n = 4$ und Versicherungssumme $S = 100,-$ €. Prämien werden zwei mal gezahlt: einmal zu Vertragsbeginn und einmal genau zwei Jahre nach Vertragsabschluss (natürlich nur, wenn der Versicherungsnehmer dann noch am Leben ist). Die Prämienhöhe P wird nach dem Äquivalenzprinzip bestimmt. Bestimmen Sie P und das Nettodeckungskapital zwei Jahre nach Vertragsabschluss.

   (c) Bestimmen Sie die Standardabweichung des diskontierten zukünftigen Verlustes des Versicherers zum Zeitpunkt $t = 0$ für die Versicherung aus Aufgabe (b).

   (d) Betrachten Sie drei Personen im Alter $x = [41] + 1$, $y = [43]$ und $z = 43$ deren zukünftige Restlebenszeiten unabhängig sind. Erläutern Sie die Bedeutung des Symbols ${}_tp_{\overline{x:y:z}}$ und bestimmen Sie ${}_2p_{\overline{x:y:z}}$.

2. Rechnen Sie dieses Beispiel ohne Sterbe- oder Leibrentefafeln.

   (a) Was versteht man unter zensierten Daten? Beschreiben Sie kurz den Kaplan-Meier Schätzer $\hat{S}(t)$ und den Nelson-Aalen Schätzer $\widetilde{S}(t)$.

   (b) Zeigen Sie, dass immer $\widetilde{S}(t) \geq \hat{S}(t)$ gilt.

   (c) Bestimmen Sie beide Schätzer für folgende Daten von Ausscheidezeitpunkten, wobei das '+' ein zensiertes Leben markiert:

$$3; 6; 6; 6; 6+; 7; 7+; 8; 8+; 8+; 11+; 13; 13; 13+; 13+.$$

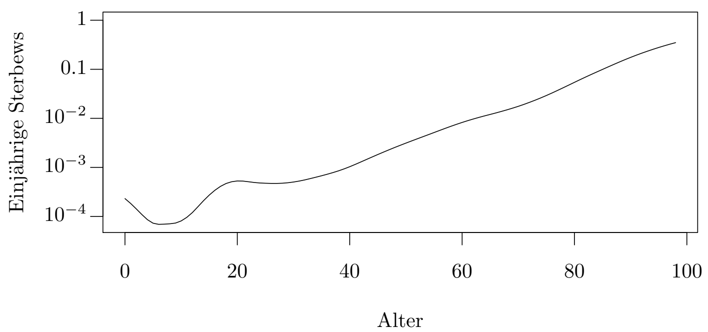
   Skizzieren Sie weiters die Funktionen $t \mapsto \hat{S}(t)$ und $t \mapsto \widetilde{S}(t)$.

3. Rechnen Sie dieses Beispiel ohne Sterbe- oder Leibrentefafeln.

   (a) Erläutern Sie die Bedeutung der finanz-mathematischen Symbole δ und d_m und zeigen Sie
   $$\lim_{m\to\infty} d_m = \delta.$$

   (b) Es bezeichne $(l_x)_{x\in\mathbb{N}}$ die Anzahl der lebenden x-jährigen. Für $x \in \mathbb{N}$ und $t \in [0,1)$ definieren wir
   $$l_{x+t} := (1-t)l_x + tl_{x+1}.$$
   Zeigen Sie, dass unter Annahme A folgende Gleichheit gilt:
   $${}_kp_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{N} \text{ und } k \geq 0.$$

   (c) Skizzieren Sie den Verlauf des Nettodeckungskapitals für folgende Verträge. Als Grundlage dafür gelte die Sterbetafel 2010/2012 - Männer und Frauen. Die zugehörigen einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten, können Sie der nachfolgenden Grafik entnehmen. Weiters sei $r = 3\%$. Die Prämiehöhe wird immer nach dem Äquivalenzprinzip bestimmt.



   i. Eine ewige Ablebensversicherung der Höhe 1000,– € für eine 35-jährige Person. Die Versicherung wird durch eine Einmalzahlung zu Vertragsbeginn finanziert.
   ii. Eine 30-jährige, vorschüssige Leibrente der Höhe 1000,– € für eine 55-jährige Person. Die Rente wird jährlich ausbezahlt. Die Prämienzahlungen erfolgen ebenfalls vorschüssig und jährlich über die gesamte Versicherungsdauer.
   iii. Eine 20-jährige gemischte Versicherung der Höhe 1000,– € für eine 40 jährige Person. Die Prämien werden vorschüssig in den ersten 10 Jahren gezahlt.

   (d) Betrachten Sie ein Modell mit m verschiedenen Ausscheideursachen, $J \in \{1,\ldots,m\}$. Für die Ausscheideintensitäten gilt
   $$\mu_{j,x} = \lambda_j \geq 0, \quad j \in \{1,\ldots,m\}, x \geq 0.$$
   Bestimmen Sie $\mathbb{E}[T_x]$ und $\mathbb{P}(J=1)$ in Abhängigkeit von $(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$.