

Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

**Lebensversicherungsmathematik**  
**(Vorlesungsprüfung)**  
**29. Februar 2016**  
**Univ.Prof. Rheinländer**

Dauer: 90 Minuten

Unterlagen: ein beidseitig handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im FAM-office,  
Sandra Trenovatz, Tel. 01-58801-10511,  
e-mail: [fam@fam.tuwien.ac.at](mailto:fam@fam.tuwien.ac.at)

---

Bsp.	Max.	Punkte
1	8	
2	8	
3	8	
$\Sigma$	24	

Schriftlich:

Assistent:  
Cetin Gülüm

Mündlich:

**Gesamtnote:**

1. Eine 50-jährige Person kauft eine gemischte Versicherung der Höhe 10000,-€. Die Laufzeit beträgt 20 Jahre. Die konstanten Prämien  $P$  werden jährlich in den letzten 10 Jahren vorschüssig gezahlt (d.h die erste Prämie wird gezahlt, wenn der Versicherungsnehmer 60 Jahre alt ist und es folgen dann neun weitere Zahlungen). Weiters sei  $r = 3\%$ .

- (a) Stellen Sie den Nettoverlust zu Vertragsbeginn in Abhängigkeit von  $K_{50}$  dar.
- (b) Das Versicherungsunternehmen wählt  $P$  so, dass der erwartete Nettoverlust zu Vertragsbeginn gleich -500,-€ beträgt. Bestimmen Sie  $P$ .
- (c) Skizzieren Sie den Verlauf des des Nettodeckungskapitals.
- (d) Im Alter von 65 Jahre stellt die versicherte Person fest, dass sie keine weiteren Prämien mehr zahlen kann. Das Versicherungsunternehmen reduziert deswegen die Versicherungssumme von 10000,-€ auf  $x,-€$ . Bestimmen Sie  $x$  nach dem Äquivalenzprinzip, wenn der Rückkaufwert der Versicherung 90% des Nettodeckungskapitals beträgt.

2. Rechnen Sie dieses Beispiel ohne Sterbe- oder Leibrentenfafeln.

- (a) Zeigen Sie

$${}_n p_x d\ddot{a}_{\overline{n}|} + \sum_{k=0}^{n-1} (1 - v^{k+1}) {}_k p_x q_{x+k} = 1 - A_{x:\overline{n}|}, \quad x, n \in \mathbb{N}.$$

- (b) Es sei  $T_0$  exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda > 0$ , d.h. die Verteilungsfunktion von  $T_0$  ist gegeben durch

$$F_0(y) = (1 - \exp(-\lambda y)) \mathbb{1}_{[0, \infty)}(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion  $F_x$  von  $T_x$  und  $\mathbb{E}[T_x]$  für alle  $x \geq 0$ . Überprüfen Sie weiters ob Annahme A erfüllt ist. Ist Annahme B erfüllt?

- (c) Gegeben sind zwei Zufallsvariablen  $T_x$  und  $T_y$ , die die Restlebenszeit von zwei Personen im Alter  $x$  bzw. Alter  $y$  modellieren. Die gemeinsame Dichte von  $T_x$  und  $T_y$  sei gegeben durch

$$f_{T_x, T_y}(s, t) = \frac{2}{45} 20^{-4} \cdot (9 \cdot 20^2 - (3s - t)^2), \quad \text{falls } s \in [0, 20] \text{ und } t \in [0, 60],$$

und 0 sonst. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die  $y$ -jährige Person vor der  $x$ -jährigen Person stirbt.

3. Verwenden Sie für dieses Beispiel die Werte aus Tabelle 1. Gehen Sie von  $r = 3\%$  und einem Höchstalter von 53 aus.

$x$	$l_x$
50	1500
51	1200
52	800
53	200

Tabelle 1:

- (a) Verwenden Sie Kommutationszahlen um  $\ddot{a}_{50:\overline{2}|}$  zu berechnen.
- (b) Sei  $x = 51$ . Verwenden Sie Annahme A um die Verteilungsfunktion  $t \mapsto F_x(t)$  von  $T_x$  zu bestimmen (für alle  $t \in \mathbb{R}$ !).
- (c) Sei  $x = 51,5$ . Verwenden Sie Annahme B um die Verteilungsfunktion  $t \mapsto F_x(t)$  von  $T_x$  zu bestimmen (für alle  $t \in \mathbb{R}$ !).
- (d) Eine 50-jährige Person A und eine 51-jährige Person B kaufen eine ewige Ablebensversicherung, die am Ende des Todesjahres von B 500,- € ausbezahlt, falls A dann noch am Leben ist. Ist A am Ende des Todesjahres von B nicht mehr am Leben, wird nichts ausbezahlt. Unter der Annahme, dass die Restlebenszeiten beider Personen unabhängig sind, berechnen Sie die NEP dieser Versicherung.

*Hinweis zu (b) und (c):* Machen Sie Fallunterscheidungen!

**Sterbetafel 2010/2012 männlich und weiblich zusammen**

Genaueres Alter (am x-ten Geburts- tag) in Jahren	Sterbe- wahrscheinlichkeit im Altersintervall x bis x+1	Überlebende im Alter x	Gestorbene im Altersintervall x bis x+1	Von den Überlebenden im Alter x		Fernere Lebens- erwartung im Alter x in Jahren	Genaueres Alter (am x-ten Geburts- tag) in Jahren	Sterbe- wahrscheinlichkeit im Altersintervall x bis x+1	Überlebende im Alter x	Gestorbene im Altersintervall x bis x+1	Von den Überlebenden im Alter x		Fernere Lebens- erwartung im Alter x in Jahren
				bis x+1	insgesamt						bis x+1	insgesamt	
				noch zu durch- lebende Jahre							noch zu durch- lebende Jahre		
x	q(x)	l(x)	d(x)	L(x)	T(x)	e(x)	x	q(x)	l(x)	d(x)	L(x)	T(x)	e(x)
0	0,0035623	100000,00	356,23	99.684	8.067.528	80,68	50	0,0028230	96628,47	272,78	96.492	3.125.168	32,34
1	0,0002311	99643,77	23,03	99.632	7.967.844	79,96	51	0,0031253	96355,69	301,14	96.205	3.028.676	31,43
2	0,0001844	99620,74	18,37	99.612	7.868.212	78,98	52	0,0034551	96054,55	331,88	95.889	2.932.470	30,53
3	0,0001429	99602,37	14,23	99.595	7.768.600	78,00	53	0,0038143	95722,66	365,11	95.540	2.836.582	29,63
4	0,0001096	99588,14	10,91	99.583	7.669.005	77,01	54	0,0042084	95357,55	401,30	95.157	2.741.042	28,74
5	0,0000858	99577,22	8,55	99.573	7.569.422	76,02	55	0,0046432	94956,25	440,90	94.736	2.645.885	27,86
6	0,0000728	99568,68	7,25	99.565	7.469.850	75,02	56	0,0051288	94515,35	484,75	94.273	2.551.149	26,99
7	0,0000689	99561,43	6,86	99.558	7.370.284	74,03	57	0,0056639	94030,59	532,58	93.764	2.456.876	26,13
8	0,0000695	99554,57	6,92	99.551	7.270.726	73,03	58	0,0062461	93498,01	584,00	93.206	2.363.112	25,27
9	0,0000707	99547,64	7,04	99.544	7.171.175	72,04	59	0,0068749	92914,01	638,77	92.595	2.269.906	24,43
10	0,0000732	99540,60	7,28	99.537	7.071.631	71,04	60	0,0075429	92275,24	696,02	91.927	2.177.311	23,60
11	0,0000808	99533,32	8,05	99.529	6.972.094	70,05	61	0,0082426	91579,21	754,85	91.202	2.085.384	22,77
12	0,0000955	99525,27	9,51	99.521	6.872.565	69,05	62	0,0089571	90824,36	813,52	90.418	1.994.182	21,96
13	0,0001197	99515,76	11,91	99.510	6.773.044	68,06	63	0,0096956	90010,84	872,71	89.574	1.903.765	21,15
14	0,0001581	99503,85	15,73	99.496	6.673.535	67,07	64	0,0104493	89138,13	931,43	88.672	1.814.190	20,35
15	0,0002101	99488,12	20,90	99.478	6.574.039	66,08	65	0,0112182	88206,70	989,52	87.712	1.725.518	19,56
16	0,0002724	99467,22	27,10	99.454	6.474.561	65,09	66	0,0120090	87217,17	1047,39	86.693	1.637.806	18,78
17	0,0003411	99440,12	33,92	99.423	6.375.107	64,11	67	0,0128721	86169,78	1109,18	85.615	1.551.112	18,00
18	0,0004097	99406,20	40,73	99.386	6.275.684	63,13	68	0,0138399	85060,60	1177,23	84.472	1.465.497	17,23
19	0,0004689	99365,47	46,59	99.342	6.176.298	62,16	69	0,0149172	83883,37	1251,30	83.258	1.381.025	16,46
20	0,0005095	99318,88	50,60	99.294	6.076.956	61,19	70	0,0161495	82632,07	1334,47	81.965	1.297.767	15,71
21	0,0005283	99268,28	52,45	99.242	5.977.663	60,22	71	0,0175720	81297,60	1428,56	80.583	1.215.802	14,95
22	0,0005252	99215,84	52,11	99.190	5.878.421	59,25	72	0,0192313	79869,03	1535,99	79.101	1.135.219	14,21
23	0,0005088	99163,73	50,46	99.139	5.779.231	58,28	73	0,0211823	78333,05	1659,27	77.503	1.056.118	13,48
24	0,0004919	99113,27	48,76	99.089	5.680.092	57,31	74	0,0234471	76673,77	1797,78	75.775	978.615	12,76
25	0,0004807	99064,52	47,62	99.041	5.581.003	56,34	75	0,0261030	74875,99	1954,48	73.899	902.840	12,06
26	0,0004745	99016,89	46,98	98.993	5.481.963	55,36	76	0,0292000	72921,51	2129,31	71.857	828.941	11,37
27	0,0004708	98969,91	46,60	98.947	5.382.969	54,39	77	0,0328535	70792,20	2325,77	69.629	757.084	10,69
28	0,0004703	98923,31	46,53	98.900	5.284.023	53,42	78	0,0371406	68466,43	2542,88	67.195	687.455	10,04
29	0,0004752	98876,78	46,98	98.853	5.185.123	52,44	79	0,0420840	65923,55	2774,33	64.536	620.260	9,41
30	0,0004857	98829,80	48,00	98.806	5.086.269	51,46	80	0,0477560	63149,22	3015,76	61.641	555.724	8,80
31	0,0005026	98781,80	49,65	98.757	4.987.463	50,49	81	0,0542112	60133,47	3259,91	58.504	494.082	8,22
32	0,0005256	98732,16	51,89	98.706	4.888.707	49,51	82	0,0615230	56873,56	3499,03	55.124	435.579	7,66
33	0,0005550	98680,26	54,77	98.653	4.790.000	48,54	83	0,0696403	53374,53	3717,02	51.516	380.455	7,13
34	0,0005914	98625,49	58,33	98.596	4.691.347	47,57	84	0,0785868	49657,51	3902,42	47.706	328.939	6,62
35	0,0006313	98567,16	62,22	98.536	4.592.751	46,60	85	0,0885201	45755,08	4050,24	43.730	281.232	6,15
36	0,0006751	98504,94	66,50	98.472	4.494.215	45,62	86	0,0995412	41704,84	4151,35	39.629	237.502	5,69
37	0,0007244	98438,44	71,31	98.403	4.395.743	44,65	87	0,1120099	37553,49	4206,36	35.450	197.873	5,27
38	0,0007816	98367,13	76,89	98.329	4.297.341	43,69	88	0,1258038	33347,13	4195,19	31.250	162.423	4,87
39	0,0008491	98290,25	83,46	98.249	4.199.012	42,72	89	0,1409640	29151,93	4109,37	27.097	131.173	4,50
40	0,0009311	98206,78	91,44	98.161	4.100.763	41,76	90	0,1573921	25042,56	3941,50	23.072	104.076	4,16
41	0,0010317	98115,34	101,23	98.065	4.002.602	40,79	91	0,1750614	21101,06	3693,98	19254	81004	3,84
42	0,0011524	98014,11	112,95	97.958	3.904.538	39,84	92	0,1938233	17407,08	3373,90	15720	61750	3,55
43	0,0012920	97901,16	126,49	97.838	3.806.580	38,88	93	0,2137463	14033,18	2999,54	12533	46030	3,28
44	0,0014516	97774,68	141,93	97.704	3.708.742	37,93	94	0,2344209	11033,64	2586,52	9740	33497	3,04
45	0,0016304	97632,75	159,18	97.553	3.611.038	36,99	95	0,2560990	8447,12	2163,30	7365	23756	2,81
46	0,0018282	97473,56	178,20	97.384	3.513.485	36,05	96	0,2787092	6283,82	1751,36	5408	16391	2,61
47	0,0020451	97295,36	198,98	97.196	3.416.101	35,11	97	0,3018203	4532,46	1367,99	3848	10983	2,42
48	0,0022826	97096,39	221,63	96.986	3.318.905	34,18	98	0,3255082	3164,47	1030,06	2649	7134	2,25
49	0,0025423	96874,76	246,29	96.752	3.221.919	33,26	99	0,3493887	2134,41	745,74	1762	4485	2,10
							100	1,0000000	1388,67	1388,56	2723	2723	1,96



