

Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Lebensversicherungsmathematik
(Vorlesungsprüfung)
28. Jänner 2016
Univ.Prof. Rheinländer

Dauer: 90 Minuten

Unterlagen: ein beidseitig handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im FAM-office,
Sandra Trenovatz, Tel. 01-58801-10511,
e-mail: fam@fam.tuwien.ac.at

| Bsp. | Max. | Punkte |
|----------|------|--------|
| 1 | 8 | |
| 2 | 8 | |
| 3 | 8 | |
| Σ | 24 | |

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. Eine 35-jährige Person kauft eine ewige Leibrente, die allerdings erst in 30 Jahren beginnt. Die Rente zahlt jährlich vorschüssig 3000,- € aus. Die Prämien P werden jährlich vorschüssig in der Aufschubzeit bezahlt, solange der Versicherungsnehmer noch lebt. Verwenden Sie die beigelegte Sterbetafel 2010/2012 und die dazugehörige Leibrententafel 2010/2012 um folgende Aufgaben zu lösen. Gehen Sie dabei von $r = 3\%$ aus.
 - (a) Stellen Sie den Nettoverlust zu Vertragsbeginn in Abhängigkeit von K_{35} dar.
 - (b) Bestimmen Sie die Prämienhöhe P nach dem Äquivalenzprinzip und skizzieren Sie den Verlauf des Nettodeckungskapitals.
 - (c) Im Alter von 55 Jahren wird die Person arbeitslos, weswegen sie die Rente nicht weiter aufschieben möchte und auch keine weiteren Prämien zahlen möchte. Deswegen muss sie eine geringere Rente in Kauf nehmen. Bestimmen Sie die Höhe dieser (neuen) Rente, wenn der Rückkaufwert der Versicherung 80% des Nettodeckungskapitals abzüglich von 100,- € beträgt.

2. Rechnen Sie dieses Beispiel ohne Sterbe- oder Leibrentefafeln.
 - (a) Wie hoch muss der Zinssatz r mindestens sein, damit Sie sich mit 240,- € eine ewige vorschüssige Zeitrente kaufen können, die monatlich 1,- € ausbezahlt.
 - (b) Zeigen Sie folgende Rechenregel mit Hilfe von bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$${}_k p_x {}_t p_{x+k} = {}_{k+t} p_x, \quad k, t, x \geq 0.$$

- (c) Betrachten Sie eine ewige Ablebensversicherung an eine x -jährige Person, $x \geq 0$. Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bezeichne P_k die Höhe der jährlichen vorschüssigen Prämie nach dem Äquivalenzprinzip, wenn Prämien nur in den ersten k Jahren gezahlt werden. Zeigen Sie allgemein, dass $P_k \geq P_{k+1}$ gilt.
- (d) Sei T_x exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, d.h. die Verteilungsfunktion von T_x ist gegeben durch $F(y) = 1 - \exp(-\lambda y)$, $y \geq 0$. Weiters sei eine positive Zinsintensität δ gegeben. Zeigen Sie

$$\bar{A}_x = \frac{\lambda}{\lambda + \delta}.$$

3. Verwenden Sie für dieses Beispiel die Werte aus Tabelle 1. Gehen Sie von $r = 3\%$ und einem Höchstalter von 24 aus.

| x | l_x |
|-----|-------|
| 20 | 1000 |
| 21 | 800 |
| 22 | 600 |
| 23 | 400 |
| 24 | 200 |

Tabelle 1:

- (a) Bestimmen Sie ${}_{2|1}q_{20}$. Verwenden Sie weiters die Kommutationszahlen C_x, D_x, M_x und N_x um A_{22} und a_{22} zu bestimmen.
- (b) Eine 21-jährige Person erwirbt eine ewige Ablebensversicherung, bei der die Versicherungsleistung am Ende des Todesjahres erfolgt. Die Auszahlung im Todesfall k Jahre nach Vertragsbeginn sei $c_k = k^2$, $k = 1, 2, 3, 4$. Bestimmen Sie die Nettoeinmalprämie dieser Versicherung.
- (c) Das Versicherungsunternehmen verlangt für die obige Versicherung n Jahre nach Vertragsbeginn Prämien in Höhe von $P_n = 4 - n$, $n = 0, 1, 2, 3$. Prämien werden nur gezahlt, falls der Versicherungsnehmer noch am Leben ist. Bestimmen Sie den Erwartungswert des Nettoverlustes L_0 .
- (d) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(L_0 > 0)$.

Sterbetafel 2010/2012 männlich und weiblich zusammen

| Genaueres Alter (am x-ten Geburts- tag) in Jahren | Sterbe- wahrscheinlichkeit im Altersintervall x bis x+1 | Überlebende im Alter x | Gestorbene im Altersintervall x bis x+1 | Von den Überlebenden im Alter x | | Fernere Lebens- erwartung im Alter x in Jahren | Genaueres Alter (am x-ten Geburts- tag) in Jahren | Sterbe- wahrscheinlichkeit im Altersintervall x bis x+1 | Überlebende im Alter x | Gestorbene im Altersintervall x bis x+1 | Von den Überlebenden im Alter x | | Fernere Lebens- erwartung im Alter x in Jahren |
|---|--|------------------------------|---|---------------------------------|-----------|--|---|--|------------------------------|---|---------------------------------|-----------|--|
| | | | | bis x+1 | insgesamt | | | | | | bis x+1 | insgesamt | |
| | | | | noch zu durch- lebende Jahre | | | | | | | | | |
| x | q(x) | l(x) | d(x) | L(x) | T(x) | e(x) | x | q(x) | l(x) | d(x) | L(x) | T(x) | e(x) |
| 0 | 0,0035623 | 100000,00 | 356,23 | 99.684 | 8.067.528 | 80,68 | 50 | 0,0028230 | 96628,47 | 272,78 | 96.492 | 3.125.168 | 32,34 |
| 1 | 0,0002311 | 99643,77 | 23,03 | 99.632 | 7.967.844 | 79,96 | 51 | 0,0031253 | 96355,69 | 301,14 | 96.205 | 3.028.676 | 31,43 |
| 2 | 0,0001844 | 99620,74 | 18,37 | 99.612 | 7.868.212 | 78,98 | 52 | 0,0034551 | 96054,55 | 331,88 | 95.889 | 2.932.470 | 30,53 |
| 3 | 0,0001429 | 99602,37 | 14,23 | 99.595 | 7.768.600 | 78,00 | 53 | 0,0038143 | 95722,66 | 365,11 | 95.540 | 2.836.582 | 29,63 |
| 4 | 0,0001096 | 99588,14 | 10,91 | 99.583 | 7.669.005 | 77,01 | 54 | 0,0042084 | 95357,55 | 401,30 | 95.157 | 2.741.042 | 28,74 |
| 5 | 0,0000858 | 99577,22 | 8,55 | 99.573 | 7.569.422 | 76,02 | 55 | 0,0046432 | 94956,25 | 440,90 | 94.736 | 2.645.885 | 27,86 |
| 6 | 0,0000728 | 99568,68 | 7,25 | 99.565 | 7.469.850 | 75,02 | 56 | 0,0051288 | 94515,35 | 484,75 | 94.273 | 2.551.149 | 26,99 |
| 7 | 0,0000689 | 99561,43 | 6,86 | 99.558 | 7.370.284 | 74,03 | 57 | 0,0056639 | 94030,59 | 532,58 | 93.764 | 2.456.876 | 26,13 |
| 8 | 0,0000695 | 99554,57 | 6,92 | 99.551 | 7.270.726 | 73,03 | 58 | 0,0062461 | 93498,01 | 584,00 | 93.206 | 2.363.112 | 25,27 |
| 9 | 0,0000707 | 99547,64 | 7,04 | 99.544 | 7.171.175 | 72,04 | 59 | 0,0068749 | 92914,01 | 638,77 | 92.595 | 2.269.906 | 24,43 |
| 10 | 0,0000732 | 99540,60 | 7,28 | 99.537 | 7.071.631 | 71,04 | 60 | 0,0075429 | 92275,24 | 696,02 | 91.927 | 2.177.311 | 23,60 |
| 11 | 0,0000808 | 99533,32 | 8,05 | 99.529 | 6.972.094 | 70,05 | 61 | 0,0082426 | 91579,21 | 754,85 | 91.202 | 2.085.384 | 22,77 |
| 12 | 0,0000955 | 99525,27 | 9,51 | 99.521 | 6.872.565 | 69,05 | 62 | 0,0089571 | 90824,36 | 813,52 | 90.418 | 1.994.182 | 21,96 |
| 13 | 0,0001197 | 99515,76 | 11,91 | 99.510 | 6.773.044 | 68,06 | 63 | 0,0096956 | 90010,84 | 872,71 | 89.574 | 1.903.765 | 21,15 |
| 14 | 0,0001581 | 99503,85 | 15,73 | 99.496 | 6.673.535 | 67,07 | 64 | 0,0104493 | 89138,13 | 931,43 | 88.672 | 1.814.190 | 20,35 |
| 15 | 0,0002101 | 99488,12 | 20,90 | 99.478 | 6.574.039 | 66,08 | 65 | 0,0112182 | 88206,70 | 989,52 | 87.712 | 1.725.518 | 19,56 |
| 16 | 0,0002724 | 99467,22 | 27,10 | 99.454 | 6.474.561 | 65,09 | 66 | 0,0120090 | 87217,17 | 1047,39 | 86.693 | 1.637.806 | 18,78 |
| 17 | 0,0003411 | 99440,12 | 33,92 | 99.423 | 6.375.107 | 64,11 | 67 | 0,0128721 | 86169,78 | 1109,18 | 85.615 | 1.551.112 | 18,00 |
| 18 | 0,0004097 | 99406,20 | 40,73 | 99.386 | 6.275.684 | 63,13 | 68 | 0,0138399 | 85060,60 | 1177,23 | 84.472 | 1.465.497 | 17,23 |
| 19 | 0,0004689 | 99365,47 | 46,59 | 99.342 | 6.176.298 | 62,16 | 69 | 0,0149172 | 83883,37 | 1251,30 | 83.258 | 1.381.025 | 16,46 |
| 20 | 0,0005095 | 99318,88 | 50,60 | 99.294 | 6.076.956 | 61,19 | 70 | 0,0161495 | 82632,07 | 1334,47 | 81.965 | 1.297.767 | 15,71 |
| 21 | 0,0005283 | 99268,28 | 52,45 | 99.242 | 5.977.663 | 60,22 | 71 | 0,0175720 | 81297,60 | 1428,56 | 80.583 | 1.215.802 | 14,95 |
| 22 | 0,0005252 | 99215,84 | 52,11 | 99.190 | 5.878.421 | 59,25 | 72 | 0,0192313 | 79869,03 | 1535,99 | 79.101 | 1.135.219 | 14,21 |
| 23 | 0,0005088 | 99163,73 | 50,46 | 99.139 | 5.779.231 | 58,28 | 73 | 0,0211823 | 78333,05 | 1659,27 | 77.503 | 1.056.118 | 13,48 |
| 24 | 0,0004919 | 99113,27 | 48,76 | 99.089 | 5.680.092 | 57,31 | 74 | 0,0234471 | 76673,77 | 1797,78 | 75.775 | 978.615 | 12,76 |
| 25 | 0,0004807 | 99064,52 | 47,62 | 99.041 | 5.581.003 | 56,34 | 75 | 0,0261030 | 74875,99 | 1954,48 | 73.899 | 902.840 | 12,06 |
| 26 | 0,0004745 | 99016,89 | 46,98 | 98.993 | 5.481.963 | 55,36 | 76 | 0,0292000 | 72921,51 | 2129,31 | 71.857 | 828.941 | 11,37 |
| 27 | 0,0004708 | 98969,91 | 46,60 | 98.947 | 5.382.969 | 54,39 | 77 | 0,0328535 | 70792,20 | 2325,77 | 69.629 | 757.084 | 10,69 |
| 28 | 0,0004703 | 98923,31 | 46,53 | 98.900 | 5.284.023 | 53,42 | 78 | 0,0371406 | 68466,43 | 2542,88 | 67.195 | 687.455 | 10,04 |
| 29 | 0,0004752 | 98876,78 | 46,98 | 98.853 | 5.185.123 | 52,44 | 79 | 0,0420840 | 65923,55 | 2774,33 | 64.536 | 620.260 | 9,41 |
| 30 | 0,0004857 | 98829,80 | 48,00 | 98.806 | 5.086.269 | 51,46 | 80 | 0,0477560 | 63149,22 | 3015,76 | 61.641 | 555.724 | 8,80 |
| 31 | 0,0005026 | 98781,80 | 49,65 | 98.757 | 4.987.463 | 50,49 | 81 | 0,0542112 | 60133,47 | 3259,91 | 58.504 | 494.082 | 8,22 |
| 32 | 0,0005256 | 98732,16 | 51,89 | 98.706 | 4.888.707 | 49,51 | 82 | 0,0615230 | 56873,56 | 3499,03 | 55.124 | 435.579 | 7,66 |
| 33 | 0,0005550 | 98680,26 | 54,77 | 98.653 | 4.790.000 | 48,54 | 83 | 0,0696403 | 53374,53 | 3717,02 | 51.516 | 380.455 | 7,13 |
| 34 | 0,0005914 | 98625,49 | 58,33 | 98.596 | 4.691.347 | 47,57 | 84 | 0,0785868 | 49657,51 | 3902,42 | 47.706 | 328.939 | 6,62 |
| 35 | 0,0006313 | 98567,16 | 62,22 | 98.536 | 4.592.751 | 46,60 | 85 | 0,0885201 | 45755,08 | 4050,24 | 43.730 | 281.232 | 6,15 |
| 36 | 0,0006751 | 98504,94 | 66,50 | 98.472 | 4.494.215 | 45,62 | 86 | 0,0995412 | 41704,84 | 4151,35 | 39.629 | 237.502 | 5,69 |
| 37 | 0,0007244 | 98438,44 | 71,31 | 98.403 | 4.395.743 | 44,65 | 87 | 0,1120099 | 37553,49 | 4206,36 | 35.450 | 197.873 | 5,27 |
| 38 | 0,0007816 | 98367,13 | 76,89 | 98.329 | 4.297.341 | 43,69 | 88 | 0,1258038 | 33347,13 | 4195,19 | 31.250 | 162.423 | 4,87 |
| 39 | 0,0008491 | 98290,25 | 83,46 | 98.249 | 4.199.012 | 42,72 | 89 | 0,1409640 | 29151,93 | 4109,37 | 27.097 | 131.173 | 4,50 |
| 40 | 0,0009311 | 98206,78 | 91,44 | 98.161 | 4.100.763 | 41,76 | 90 | 0,1573921 | 25042,56 | 3941,50 | 23.072 | 104.076 | 4,16 |
| 41 | 0,0010317 | 98115,34 | 101,23 | 98.065 | 4.002.602 | 40,79 | 91 | 0,1750614 | 21101,06 | 3693,98 | 19254 | 81004 | 3,84 |
| 42 | 0,0011524 | 98014,11 | 112,95 | 97.958 | 3.904.538 | 39,84 | 92 | 0,1938233 | 17407,08 | 3373,90 | 15720 | 61750 | 3,55 |
| 43 | 0,0012920 | 97901,16 | 126,49 | 97.838 | 3.806.580 | 38,88 | 93 | 0,2137463 | 14033,18 | 2999,54 | 12533 | 46030 | 3,28 |
| 44 | 0,0014516 | 97774,68 | 141,93 | 97.704 | 3.708.742 | 37,93 | 94 | 0,2344209 | 11033,64 | 2586,52 | 9740 | 33497 | 3,04 |
| 45 | 0,0016304 | 97632,75 | 159,18 | 97.553 | 3.611.038 | 36,99 | 95 | 0,2560990 | 8447,12 | 2163,30 | 7365 | 23756 | 2,81 |
| 46 | 0,0018282 | 97473,56 | 178,20 | 97.384 | 3.513.485 | 36,05 | 96 | 0,2787092 | 6283,82 | 1751,36 | 5408 | 16391 | 2,61 |
| 47 | 0,0020451 | 97295,36 | 198,98 | 97.196 | 3.416.101 | 35,11 | 97 | 0,3018203 | 4532,46 | 1367,99 | 3848 | 10983 | 2,42 |
| 48 | 0,0022826 | 97096,39 | 221,63 | 96.986 | 3.318.905 | 34,18 | 98 | 0,3255082 | 3164,47 | 1030,06 | 2649 | 7134 | 2,25 |
| 49 | 0,0025423 | 96874,76 | 246,29 | 96.752 | 3.221.919 | 33,26 | 99 | 0,3493887 | 2134,41 | 745,74 | 1762 | 4485 | 2,10 |
| | | | | | | | 100 | 1,0000000 | 1388,67 | 1388,56 | 2723 | 2723 | 1,96 |

