

Name:

Mat.Nr.:

Kennz.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

**Lebensversicherungsmathematik**  
**(Vorlesungsprüfung)**  
**23.01.2013**  
**Prof. Rheinländer**

(Dauer 90 Minuten, Erlaubte Hilfsmittel: ein handbeschriebener DIN-A4 Zettel und ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner)

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im Sekretariat,  
Sandra Trenovatz, Tel. 01-58801-10511,  
e-mail: [sandra@fam.tuwien.ac.at](mailto:sandra@fam.tuwien.ac.at)

---

Bsp.	Max.	Punkte
1	4	
2	4	
3	4	
4	4	
5	4	
$\Sigma$	20	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

**Gesamtnote:**

1. (a) (2 P.) Zeige, dass Folgendes gilt:

(4 Pkt.)

$${}_{m+n}p_x = {}_mp_x {}_np_{x+m}, \quad x, m, n \in \mathbb{R}^+.$$

- (b) (2 P.) Zeige, dass im Gompertz–Makeham Modell (d.h.  $\mu_{x+t} = A + Bc^{x+t}$ , für  $x, t \geq 0$ ,  $A, B > 0$  und  $c > 1$ ) die Verteilung der zukünftigen Lebensdauer  $F_x$  eine Gompertz–Makeham Verteilung besitzt. Zur Erinnerung: Die Gompertz–Makehamverteilung mit Parametern  $\alpha, \beta, \lambda > 0$  ist gegeben durch die Verteilungsfunktion

$$F(y) = 1 - e^{-\lambda y - \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta y} - 1)}, \quad y \geq 0.$$

2. (a) (2 P.) Eine 40-jährige Frau schließt eine 30-jährige gemischte Versicherung mit Versicherungssumme (Quersumme Ihrer Matrikelnummer)\*1000 Euro ab. Die Prämien werden jährlich vorschüssig bezahlt. Weiters fallen anfängliche Kosten in der Höhe von 3% der Versicherungssumme plus 20% der ersten Prämie an. Laufende Kosten betragen 3% der Prämie ab dem zweiten Jahr. Im Todesfall während der ersten 30 Jahre wird die Summe am Ende des Todesjahres ausbezahlt, ansonsten nach Ablauf der 30 Jahre. Berechne die jährliche Bruttoprämie nach dem Äquivalenzprinzip.

(4 Pkt.)

- (b) (2 P.) Ein 40-jähriger Mann schließt eine 30-jährige Erlebensversicherung mit Versicherungssumme (Quersumme Ihrer Matrikelnummer)\*1000 Euro ab. Die Prämie wird als Einmalprämie zu Beginn der Laufzeit bezahlt. Anfängliche Kosten fallen in der Höhe von 4% der Versicherungssumme an. Laufende jährliche Kosten betragen 1% der Einmalprämie ab dem ersten Jahr. Berechne die Bruttoprämie nach dem Äquivalenzprinzip.

3. (a) (1 P.) Was versteht man unter dem prospektiven Deckungskapital?

(4 Pkt.)

- (b) (1 P.) Erkläre mit Hilfe von (a), warum das Deckungskapital unter Einbeziehung der Kosten negativ werden kann.

- (c) (2 P.) Weise die vier skizzierten Entwicklungen des Nettodeckungskapitals den entsprechenden Verträgen (A bis D) zu und begründe die Entscheidung kurz. Als Basis dient folgende AVÖ-Sterbetafel 2000/02 für Männer, sowie  $i = 0,03$ :

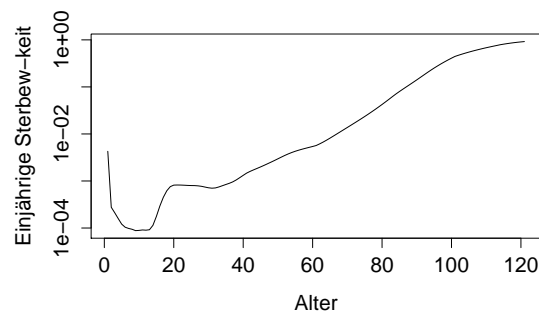


Abbildung 1: Sterbetafel

- (A) 25-jährige Ablebensversicherung, eines 50-jährigen Versicherten, finanziert durch eine einmalige Prämienzahlung.
- (B) 10-jährige Ablebensversicherung, eines 20-jährigen Versicherten, finanziert durch jährliche Prämienzahlung.
- (C) 20-jährige gemischte Versicherung, eines 60-jährigen Versicherten, finanziert durch eine einmalige Prämienzahlung.
- (D) 30-jährige Leibrente, um 20 Jahre aufgeschoben, eines 40-jährigen Versicherten, finanziert durch jährliche Prämienzahlung während der Aufschubzeit.

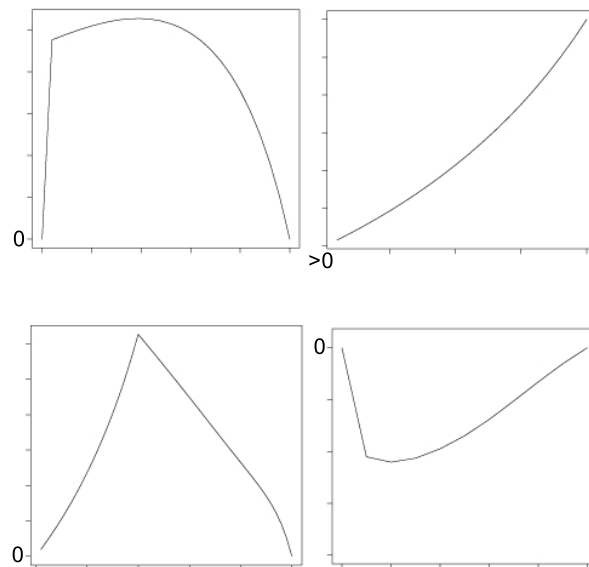


Abbildung 2: Deckungskapital.  $x$ -Achse: Zeit;  $y$ -Achse: Höhe des Deckungskapitals.

4. Eine 30-jährige Frau schließt eine Ablebensversicherung ab, wobei bei Tod vor dem 60. Lebensjahr (Quersumme Ihrer Matrikelnummer)\*2000 Euro und bei Tod ab dem 60. Lebensjahr (Quersumme Ihrer Matrikelnummer)\*1000 Euro ausbezahlt werden. Die Prämien werden jährlich vorschüssig bis ans Lebensende bezahlt. Es fallen anfängliche Kosten in der Höhe von 1000 Euro plus 20% der ersten Prämie an. Im Versicherungsfall wird die Summe am Ende des Todesjahres ausbezahlt. (4 Pkt.)
- (2 P.) Berechne die Bruttoprämie nach dem Äquivalenzprinzip.
  - (1 P.) Mit welcher Wahrscheinlichkeit macht der Versicherer keinen Verlust?
  - (1 P.) Berechne das ausreichende Deckungskapital für die gesamte Laufzeit.
5. (a) (1 P.) Was versteht man unter zensierten Daten? Beschreibe kurz zwei Schätzer, die aus zensierten Daten Sterbewahrscheinlichkeiten schätzen können. (4 Pkt.)
- (2 P.) Wähle einen der obigen Schätzer und berechne eine Näherung für  $S(t)$  mit folgenden Daten von Ausscheidezeitpunkten, wobei das '+' ein zensiertes Leben markiert: 2, 5, 5, 5, 5+, 6+, 8, 8, 8+, 13, 13, 13+, 13+.
  - (1 P.) Ein Versicherungsunternehmen will verschiedene Verträge für Raucher und für Nichtraucher anbieten, da vermutet wird, dass die Sterblichkeitsintensität zwischen diesen Gruppen variiert. Wie kann dafür die Cox-Regression verwendet werden, und welche Rolle spielen dabei die Größen  $h_0(t)$  und  $\beta$ ?