Beispiellösung der LVM Prüfung

Reinhold Kainhofer

5. März 2007

1. Es sei für $a = 1$ die Sterbewahrscheinlichkeit gegeben als

$$ {}_t p_x = e^{-t} \left(\frac{x+t}{x} \right)^a $$

   (a) Bestimme daraus die Sterbeintensität μ_{x+t} sowie $\mathbb{E}[T_x]$. (2.5)

   (b) Bestimme die Netto-Einmalprämie einer um $k = 10$ Jahre aufgeschobenen Leibrente der Höhe H_1 an eine x-jährige Person, wenn (a) die Zinsintensität $\delta(t) = 0$ und (b) $\delta(t) = 1$ beträgt! (2.5)

   (c) Bestimme die stetige Nettoprämie einer lebenslangen Ablebensversicherung mit konstanter Leistung H_2 im Todeszeitpunkt, wenn keine Zinsen bezahlt werden ($\delta(t) = 0$). Die Prämien werden dabei ebenso lebenslange bezahlt und werden nicht verzinst. (2)

   Lösung:

   (a) μ_{x+t} ergibt sich aus der negativen Ableitung des Logarithmus von ${}_t p_x$, die Lebenserwartung durch Integration von 0 bis ∞ mittels partieller Integration:

$$ \mu_{x+t} = -\frac{\partial}{\partial t} \log {}_t p_x = -\frac{\partial}{\partial t} \left(-t + \log(x+t) - \log x \right) = 1 - \frac{1}{x+t} = \frac{x+t-1}{x+t} $$

$$ \begin{aligned} \mathbb{E}[T_x] &= \int_0^\infty {}_t p_x dt = \frac{1}{x} \int_0^\infty (x+t) e^{-t} dt = \frac{1}{x} \left(-x\, e^{-t} \big|_0^\infty + \int_0^\infty t e^{-t} dt \right) \\ &= 1 + (-1) t\, e^{-t} \big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 + \frac{-1}{x}\, e^{-t} \big|_0^\infty = 1 + \frac{1}{x} \end{aligned} $$

   (b) Aufgeschobene Leibrente entspricht NEP einer Erlebensversicherung der Höhe der NEP der LR an eine $x + t$ jährige Person:

$$ NEP = H_1 \cdot {}_{10|}\bar{a}_x = H_1 v^{10} {}_{10}p_x \bar{a}_{x+10} = H_1 v^{10} {}_{10}p_x \int_0^\infty e^{-t} \frac{x+t+10}{x+10} e^{-\delta t} dt $$

   (a) Für $\delta = 0$, d.h. kein Zins, gilt immer $\bar{a}_x = \mathbb{E}[T_x]$, insbesondere hier $\bar{a}_{x+10} = \mathbb{E}[T_{x+10}] = \frac{x+10+1}{x+10}$. Insgesamt also $NEP = H_1 e^{-10} \frac{x+10}{x} \frac{x+10+1}{x+10} = H_1 \frac{x+11}{x} e^{-10}$. (b) Für $\delta = 1$ gilt $v = e^{-1}$ und damit

$$ \begin{aligned} NEP &= H_1 e^{-10} e^{-10} \frac{x+10}{x} \int_0^\infty e^{-2t} \frac{x+t+10}{x+10} dt \\ &= \frac{H_1}{x} e^{-20} \left((x+10) \int_0^\infty e^{-2t} dt + \int_0^\infty t e^{-2t} dt \right) = \frac{H_1}{x} e^{-20} \left((x+10) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \end{aligned} $$

   (c) Da keine Verzinsung und daher auch keine Diskontierung erfolgt, die Auszahlung aber sicher irgendwann geschieht, gilt $\bar{A}_x = 1$ für die lebenslängliche ALV der Höhe 1. Ebenso gilt für die NEP der Leibrente $\bar{a}_x = \mathbb{E}[T_x]$. Insgesamt gilt also für die stetige Prämie der ALV

$$ H_2 P_x = \frac{H_2 \bar{A}_x}{\bar{a}_x} = H_2 \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = H_2 \frac{x}{x+1} $$

2. Die lebenslängliche Ablebensversicherung eines x-jährigen ist gegen eine lebenslängliche Prämie abgeschlossen, die in den ersten 5 Versicherungsjahren doppelt so hoch ist, als während der restlichen Versicherungsdauer.
Nach Ablauf von 15 Jahren wird die Versicherung in eine gemischt Versicherung des nunmehr $(x+15)$-jährigen umgewandelt, mit einer restlichen Laufzeit von 10 Jahren. Die Versicherungssumme soll dabei verdoppelt werden. Während dieser neuen Laufzeit sind gleichbleibende jährliche Prämien ab dem Umwandlungstag zu bezahlen.

   Bestimme in allgemeinen Formeln mit nicht näher spezifiziertem Zins i, Alter x und Versicherungshöhe H:

   (a) Die <u>ausreichende</u> Prämie der ursprünglichen Versicherung bei Kosten α, β und γ. (2)

   (b) Das <u>ausreichende</u> Deckungskapital am Umwandlungstag, wobei sowohl die prospektive als auch die retrospektive Darstellung angegeben werden soll. (2)

   (c) Die ab der Umwandlung zu bezahlende <u>ausreichende</u> Prämie. (2)

   (d) *Bonusbeispiel: Zeige die Gleichheit der pro- und der retrospektiven Darstellung des Deckungskapitals aus Aufgabe 2b.* *(2 Bonuspunkte)*

Lösung:

(a) Nach dem Äquivalenzprinzip gilt:

$$A_x + \alpha + \beta P^a \ddot{a}_x + \beta P^a \ddot{a}_{x:\overline{5}|} + \gamma \ddot{a}_x = P^a \ddot{a}_x + P^a \ddot{a}_{x:\overline{5}|}$$

und damit sofort

$$P^a = \frac{A_x + \alpha + \gamma \ddot{a}_x}{\ddot{a}_x(1-\beta) + \ddot{a}_{x:\overline{5}|}(1-\beta)}$$

(b) prospektiv: ${}_{15}V_x^{a,pro} = A_{x+15} + \beta P^a \ddot{a}_{x+15} + \gamma \ddot{a}_{x+15} - P^a \ddot{a}_{x+15}$ (da $t = 15 > 5$)

retrospektiv: ${}_{15}V_x^{a,retro} = -\frac{\left(A^1_{x:\overline{15}|} + \alpha + \beta P^a \ddot{a}_{x:\overline{15}|} + \beta P^a \ddot{a}_{x:\overline{5}|} + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{15}|} - P^a \ddot{a}_{x:\overline{15}|} - P^a \ddot{a}_{x:\overline{5}|}\right)}{v^{15}\,{}_{15}p_x}$

(c) Wegen der Gleichheit von DK vor und nach der Umwandlung gilt (mit etwaigen einmaligen Umwandlungskosten α^{Umwand})

$${}_{15}V_x^a = \widetilde{V}_{x+15}^{a,pro} = 2A_{x+15:\overline{10}|} + \alpha^{Umwand} + \beta \widetilde{P}^a \ddot{a}_{x+15:\overline{10}|} + \gamma \ddot{a}_{x+15:\overline{10}|} - \widetilde{P}^a \ddot{a}_{x+15:\overline{10}|}$$

und daher

$$\widetilde{P}^a = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{2A_{x+15:\overline{10}|} + \alpha^{Umwand} - {}_{15}V_x^a}{\ddot{a}_{x+15:\overline{10}|}} + \gamma\right)$$

(d) (Bonusbeispiel) Nach dem Äquivalenzprinzip gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= A_x + \alpha + (\beta-1)P^a \ddot{a}_x + (\beta-1)P^a \ddot{a}_{x:\overline{5}|} + \gamma \ddot{a}_x \\
&= A^1_{x:\overline{15}|} + {}_{15}E_x A_{x+15} + \alpha + (\beta-1)P^a(\ddot{a}_{x:\overline{15}|} + \ddot{a}_{x:\overline{5}|}) + {}_{15}E_x(\beta-1)P^a \ddot{a}_{x+15} + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{15}|} + {}_{15}E_x \gamma \ddot{a}_{x+15} \\
&= \underbrace{\left(A^1_{x:\overline{15}|} + \alpha + (\beta-1)P^a\left(\ddot{a}_{x:\overline{15}|} + \ddot{a}_{x:\overline{5}|}\right) + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{15}|}\right)}_{-{}_{15}E_x \cdot {}_{15}V_x^{a,retro}} + \\
&\qquad {}_{15}E_x \underbrace{\left(A_{x+15} + {}_{15}E_x(\beta-1)P^a \ddot{a}_{x+15} + {}_{15}E_x \gamma \ddot{a}_{x+15}\right)}_{{}_{15}V_x^{a,pro}}
\end{aligned}$$

Insgesamt also ${}_{15}V_x^{a,retro} = {}_{15}V_x^{a,pro}$. □

3. Betrachte eine reine Erlebensversicherung und eine gemischte Versicherung, beide auf eine Laufzeit von $n = 30$ Jahren an einen $x = 30$-jährigen österreichischen Mann. Bei einem Zins von $i = 3\%$ bestimme folgende Größen mittels der beiliegenden österreichischen Sterbe- und Leibrententafeln.

   (a) Bestimme die Spar- und die Risikoprämie im ersten Jahr, zu $t = 15$ Jahre und im letzten Versicherungsjahr! (2.5)

   (b) Bestimme das Netto-Deckungskapital der beiden Versicherungen nach dem ersten Jahr, zu $t = 15$ Jahre und am Anfang des letzten Jahres! (1.5)

Lösung:

Die allgemeinen Formeln für eine Versicherung mit NEP $B_{x:n}$ (hier entweder $A_{x:n}$ oder $A_{x:\overset{1}{n}}$) lauten nach der Angabe:

$$\begin{aligned}
\Pi_k + {}_kV_x &= v\ {}_{k+1}V_x + v\,(c_{k+1} - {}_{k+1}V_x)\,q_{x+k} && \text{(Rekursionsgleichung des DK)}\\
P = \Pi_k &= B_{x:n}/\ddot{a}_{x:n} = \Pi_k^r + \Pi_k^s && \text{(NEP)}\\
\Pi_k^r &= v\ q_{x+k}\,({}_{k+1}V_x - c_{k+1}) && \text{(Definition Risikoprämie)}\\
\Pi_k^s &= v\ {}_{k+1}V_x - {}_kV_x && \text{(Definition Sparprämie)}
\end{aligned}$$

Aus der Rekursionsgleichung ergibt sich sofort

$$ {}_{k+1}V_x = \frac{{}_kV_x + \Pi_k - v\ c_{k+1}\ q_{x+k}}{v(1 - q_{x+k})} $$

In diesem konkreten Fall werden folgende Werte benötigt:

$$\begin{aligned}
v &= (1+i)^{-1} = 1/1.03 = 0.9708737864\\
d &= 1 - v = 0.02912621360\\
A_{30:\overset{1}{30}} &= v^{30}\ {}_{30}p_{30} = v^{30}\ l_{60}/l_{30} = 0.41198676 \cdot 87141/97908 = 0.3666803\\
\ddot{a}_{30:30} &= \ddot{a}_{30} - A_{30:\overset{1}{30}}\ \ddot{a}_{60} = 25.158 - 0.3666803 \cdot 14.911 = 19.6904\\
A_{30:30} &= 1 - d\ \ddot{a}_{30:30} = 0.426492\\
A_{46:\overset{1}{14}} &= v^{14}\ {}_{14}p_{46} = v^{14}\ l_{60}/l_{46} = 0.661118 \cdot 87141/95423 = 0.603738\\
\ddot{a}_{46:14} &= \ddot{a}_{46} - A_{46:\overset{1}{14}}\ \ddot{a}_{60} = 20.294 - 0.603738 \cdot 14.911 = 11.2917\\
A_{46:14} &= 1 - d\ \ddot{a}_{46:14} = 0.671116
\end{aligned}$$

vers.math. Größe	ELV	gem. Vers.
Prämie P	$P_{30:\overset{1}{30}} = A_{30:\overset{1}{30}}/\ddot{a}_{30:30} = 0.0186223$	$P_{30:30} = A_{30:30}/\ddot{a}_{30:30} = 0.0216599$
NDK ${}_kV_x$	${}_kV_x = A_{x+k:\overset{1}{n-k}} - P\ddot{a}_{x+k:n-k}$	${}_kV_x = A_{x+k:n-k} - P\ddot{a}_{x+k:n-k}$

(a) Für $\Pi_0^{r/k}$, $\Pi_{15}^{r/k}$ und $\Pi_{29}^{r/k}$ wird aufgrund obiger Gleichungen zusätzlich zu den bekannten Werten ${}_0V_x = 0$ sowie ${}_{30}V_x = 1$ für beide Versicherungen) noch das DK ${}_1V_x$ und ${}_{16}V_x$ benötigt.

Nettodeckungskapital	ELV	gem. Vers.
NDK ${}_1V_{30} = \frac{P - v\ c_1 q_{30}}{v(1-q_{30})}$	$\frac{P}{v(1-q_{30})} = 0.0191978$	$\frac{P - v\ q_{30}}{v(1-q_{30})} = 0.0214493$
NDK ${}_{16}V_{30} = B_{46:14} - P\ddot{a}_{46:14}$	0.393461	0.426539

Jahresprämie allgemein	ELV	gem. Vers.
$\Pi_0^r = P - \Pi_0^s = (\Pi_0^s$ s.u.)	-0.0000163408	0.000835337
$\Pi_0^s = v\ {}_1V_{30} =$	0.0186386	0.0208246
$\Pi_{15}^r = v\ q_{45}\,(c_{16} - {}_{16}V_{30}) =$	$-vq_{45}\ {}_{16}V_{30} = -0.0012436$	0.00181253
$\Pi_{15}^s = P - \Pi_{15}^r =$	0.0198659	0.0198474
$\Pi_{29}^r = v\ q_{59}(c_{30} - {}_{30}V_{30}) =$	$-vq_{59} = -0.0100247$	0
$\Pi_{29}^s = P - \Pi_{29}^r =$	$0.0216599 + 0.0100247 = 0.0316846$	$P = 0.0216599$

(b) ${}_1V_x$ wurde schon für den ersten Teil des Beispieles berechnet.

NDK	ELV	gem. Vers.
${}_1V_{30}$	0.0191978	0.0214493
${}_{15}V_{30} = v\ {}_{16}V_{30} - \Pi_{15}^s$	0.362135	0.394268
${}_{29}V_{30} = v\ {}_{30}V_{30} - \Pi_{29}^s$	0.939189	0.949214