Vorlesungsprüfung Lebensversicherungsmathematik
31. Jänner 2007
Beispiellösung

1. (a) Restschuld nach k+1 Jahren: $c_{k+1} = 300.000\,(1+i)^{k+1}$
   Netto-Einmalprämie der Versicherung:

$$\begin{aligned} NEP_x &= \sum_{k=0}^{9} 300.000\,(1+i)^{k+1}\,v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} \\ &= 300.000 \sum_{k=0}^{9} {}_kp_x\,q_{x+k} \\ &= 300.000\,(1-\,{}_{10}p_x) \end{aligned}$$

   (b) De Moivre: $\omega = 100$, $q_x = \frac{1}{100-x} \quad \Rightarrow \quad p_x = \frac{99-x}{100-x}$, ${}_kp_x = \frac{100-k-x}{100-x}$

$$\begin{aligned} NEP_x(DeMoivre) &= 300.000\left(1 - \frac{90-x}{100-x}\right) \\ &= 300.000\,\frac{10}{100-x} \overset{x=35}{=} 46.153,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} NEP_{35}(Sterbetafel) &= 300.000\left(1 - \frac{l_{45}}{l_{35}}\right) \\ &= 300.000\left(1 - \frac{95.705}{97.444}\right) = 5.353,84 \end{aligned}$$

   (c) Der Auszahlungszeitpunkt der Ablebensversicherung hat keinen Einfluss auf den Barwert der Versicherungsleistung (siehe (a)!).
   Äquivalenzprinzip: $\ddot{a}^{(12)}_{35:\overline{10}|} \cdot P = NEP_{35}(Sterbetafel)$

$$\ddot{a}^{(12)}_{35:\overline{10}|} = \ddot{a}^{(12)}_{35} - v^{10}\,{}_{10}p_{35}\,\ddot{a}^{(12)}_{45}$$

   Der unterjährige Rentenbarwert wird berechnet durch

$$\ddot{a}^{(12)}_x = \alpha(12)\,\ddot{a}_x - \beta(12),$$

wobei $\alpha(12) = \frac{i\,d}{i^{(12)}\,d^{(12)}}$, $\beta(12) = \frac{i-i^{(12)}}{i^{(12)}\,d^{(12)}}$ mit $i^{(12)} = 12\,((1+i)^{\frac{1}{12}} - 1)$ und $d^{(12)} = 12\,(1-(1-d)^{\frac{1}{12}})$.

Damit gilt $\ddot{a}_{35}^{(12)} = 25,4459$ und $\ddot{a}_{45}^{(12)} = 21,6857$ und schließlich $\ddot{a}^{(12)}_{35:\overline{10|}} = 8,80738$.

Die Prämie ergibt sich dann zu $P = \frac{NEP_{35}(Sterbetafel)}{\ddot{a}^{(12)}_{35:\overline{10|}}} = 607,882$.

2. (a) Äquivalenzprinzip: $\ddot{a}_{30:\overline{10|}} \cdot P = 10.000\,A_{30:\overline{20|}}$

   Es gilt $\ddot{a}_{30:\overline{10|}} = \ddot{a}_{30} - v^{10}\,{}_{10}p_{30}\,\ddot{a}_{40} = 8,74847$ und $\ddot{a}_{30:\overline{20|}} = \ddot{a}_{30} - v^{20}\,{}_{20}p_{30}\,\ddot{a}_{50} = 15,1458$.

   Damit ergibt sich $A_{30:\overline{20|}} = 1 - d\,\ddot{a}_{30:\overline{20|}} = 0,558861$.

   Die Prämie hat dann die Höhe $P = 10.000\,\frac{A_{30:\overline{20|}}}{\ddot{a}_{30:\overline{10|}}} = 638,81$.

   (b) Deckungskapital nach 10 Jahren:

   ${}_{10}V_{30} = 10.000\,A_{40:\overline{10|}} = 10.000\,(1 - d\,\ddot{a}_{40:\overline{10|}}) = 7.466,94$

   mit $\ddot{a}_{40:\overline{10|}} = \ddot{a}_{40} - v^{10}\,{}_{10}p_{40}\,\ddot{a}_{50} = 8,69684$.

   Rekursive Bestimmung von ${}_{11}V_{30}$ und ${}_{12}V_{30}$ mittels

$$
{}_{k+1}V_x = \frac{1}{v\,p_{x+k}}({}_kV_x + P_k - v\,c_{k+1}\,q_{x+k}) :
$$

   ${}_{11}V_{30} = \frac{1}{v\,p_{40}}\,({}_{10}V_{30} + 0 - v\,10.000\,q_{40}) = 7.686,69$

   ${}_{12}V_{30} = \frac{1}{v\,p_{41}}\,({}_{11}V_{30} + 0 - v\,10.000\,q_{41}) = 7.913,04$

   (c) Erhöhung der Erlebenssumme durch zusätzliche Prämienzahlung entspricht dem Abschluss einer neuen Erlebensversicherung. Nach Äquivalenzprizip ist die zusätzliche Erlebenssumme zu berechnen durch $P\,\ddot{a}_{40:\overline{5|}} = H\,{}_{10}E_{40}$.

   Es gilt ${}_{10}E_{40} = v^{10}\,{}_{10}p_{40} = 0,72246$ und $\ddot{a}_{40:\overline{5|}} = \ddot{a}_{40} - v^5\,{}_5p_{40}\,\ddot{a}_{45} = 4,69889$.

   Somit ist $H = \frac{P\,\ddot{a}_{40:\overline{5|}}}{{}_{10}E_{40}} = 4.154,83$ und die Erlebenssumme der gesamten neuen Versicherung ist $E_{neu} = 14.154,83$.

   (d) ${}_{10}V'_{30} = {}_{10}V_{30} = 7.466,94$

   ${}_{11}V'_{30} = \frac{1}{v\,p_{40}}({}_{10}V'_{30} + P - v\,10.000\,q_{40}) = 8.345,88$

3. Annahme: Gleichverteilung der Sterblichkeit auf ein Jahr (Annahme a))

   Mit Hilfe der Formel $\ddot{a}_{x+u} = \frac{1-u}{1-uq_x}\,\ddot{a}_x + u\,\frac{1-q_x}{1-uq_x}\,\ddot{a}_{x+1}$ erhält man für den Barwert der unterjährig beginnenden Leibrente und Ablebensversicherung

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{22+\frac{1}{2}} &= \frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\,q_{22}}\,\ddot{a}_{22} + \frac{1}{2}\,\frac{1-q_{22}}{1-\frac{1}{2}\,q_{22}}\,\ddot{a}_{23} \\
&= \frac{1}{2-q_{22}}\,\ddot{a}_{22} + \frac{1-q_{22}}{2-q_{22}}\,\ddot{a}_{23} \\
&= 26,8145
\end{aligned}
$$

(Alternativ könnte wegen $q << 1$ auch die Näherung $\ddot{a}_{22+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\ddot{a}_{22} + \ddot{a}_{23}\right)$ benutzt werden.)
$A_{22+\frac{1}{2}} = 1 - d\,\ddot{a}_{22+\frac{1}{2}} = 0,218994$
Damit ergibt sich die ausreichende Prämie zu $P^{(a)} = \frac{A_{22+\frac{1}{2}}+\alpha+\gamma\,\ddot{a}_{22+\frac{1}{2}}}{\ddot{a}_{22+\frac{1}{2}}} = 0,0400316.$

4. Sparprämie: $\Pi^s = {}_{k+1}V_x\,v - {}_kV_x$
Risikoprämie: $\Pi^r = (c_{k+1} - {}_{k+1}V_x)\,v\,q_{x+k}$
$\Pi^s = \Pi^r = \frac{\Pi}{2}$ und $c_{k+1} = 1$
Das Deckungskapital nach k Jahren beträgt

$$\begin{aligned} {}_kV_x &= A_{x+k} - \Pi\,\ddot{a}_{x+k} \\ &= 1 - d\,\ddot{a}_{x+k} - \Pi\,\ddot{a}_{x+k} \\ &= 1 - (d + \Pi)\,\ddot{a}_{x+k} \qquad (1) \end{aligned}$$

Aus der Gleichung für die Sparprämie folgt $\frac{1}{v}\left(\frac{\Pi}{2} + {}_kV_x\right) = {}_{k+1}V_x$
Einsetzen in die Gleichung $\Pi = 2\,(1 - {}_{k+1}V_x)\,v\,q_{x+k}$ der Risikoprämie ergibt

$$\Pi = 2\left(v - \frac{\Pi}{2} - {}_kV_x\right) q_{x+k}$$

oder

$$\Pi\,(1 + q_{x+k}) = 2\,(v - {}_kV_x)\,q_{x+k}$$

Einsetzen in (1) ergibt

$${}_kV_x = 1 - \left(d + \frac{2\,(v - {}_kV_x)\,q_{x+k}}{1 + q_{x+k}}\right)\ddot{a}_{x+k}$$

Durch Auflösen nach ${}_kV_x$ erhält man

$${}_kV_x - {}_kV_x\frac{2\,q_{x+k}\,\ddot{a}_{x+k}}{1 + q_{x+k}} = 1 - \left(d + \frac{2\,v\,q_{x+k}}{1 + q_{x+k}}\right)\ddot{a}_{x+k}$$

und somit

$${}_kV_x = \frac{1 - \left(d + \frac{2\,v\,q_{x+k}}{1+q_{x+k}}\right)\ddot{a}_{x+k}}{1 - \frac{2\,q_{x+k}\,\ddot{a}_{x+k}}{1+q_{x+k}}} = \frac{1 - d\ddot{a}_{x+k} - v\left(\frac{2\,q_{x+k}\,\ddot{a}_{x+k}}{1+q_{x+k}}\right)}{1 - \left(\frac{2\,q_{x+k}\,\ddot{a}_{x+k}}{1+q_{x+k}}\right)}$$

Wenn man die gegebenen Werte einsetzt erhält man ${}_kV_x = -2,2599$.

Bemerkung 1. Dieser Wert macht natürlich keinen Sinn, da bisher lediglich Prämien, aber keine Auszahlungen erfolgten (weshalb das DK auf alle Fälle positiv sein müsste!). Dies ist zurückzuführen auf einen Tippfehler in der Angabe: Es sollte $q_{x+k} = 0.01$ – nicht 0.03 – lauten, entsprechend einem etwa 58-jährigen österreichischen Mann.

Damit ergibt sich ein vernünftiger Wert von ${}_kV_x = 0.390811$.