Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle
(Vorlesungsprüfung)
22. Februar 2023

Dauer: 120 Minuten

Bei der schriftlichen Prüfung darf ein nicht programmierbarer Taschenrechner benutzt werden.

Frage.	Max.	Punkte
1	30	
2	15	
3	9	
4	12	
5	14	
$\sum$	80	

Note:

1. **Theoriefragen: Mehr-Perioden-Modell**

   (1) Welche Messbarkeit brauchen wir für die Handelsstrategie $\overline{\xi} = (\xi^0, \xi)$? Definition? 2 Pkt

   (2) Was ist eine selbstfinanzierende Handelsstrategie? 1 Pkt

   (3) Definieren Sie den diskontierten Wertprozess V mit der Handelsstrategie $\overline{\xi}$ und dem diskontierten Preisprozess X und stellen Sie diesen diskontierten Wertprozess als ein diskretes stochastisches Integral dar. 3 Pkt

   (4) Was bedeutet eine Arbitragemöglichkeit im Mehr-Perioden-Modell? 1 Pkt

   (5) Formulieren Sie die *Lokalisierung der Arbitrage* und den *ersten Hauptsatz zur Bewertung von Finanzinstrumenten* (auch die notwendige Definition, z.B. äquivalentes Martingalmaß). 4 Pkt

   (6) Beweisen Sie die einfachere Richtung des ersten Hauptsatzes. 3 Pkt

   (7) Wie definieren Sie einen (diskontierten) arbitragefreien Preis eines (diskontierten) Zahlungsanspruchs? Wie bewerten Sie einen Zahlungsanspruch? 3 Pkt

   (8) Definieren Sie die Erreichbarkeit eines diskontierten Zahlungsanspruchs H und die Vollständigkeit eines Marktmodells. Formulieren und beweisen Sie den *zweiten Hauptsatz zur Bewertung von Finanzinstrumenten.* 7 Pkt

   (9) Diskutieren Sie über die Menge der arbitragefreien Preise in einem vollständigen und unvollständigen Markt. (***Hinweis:** Unterscheiden Sie die Fälle, wenn H erreichbar oder nicht erreichbar ist. Ist die Menge ein Intervall oder nur einpunktig?*) 3 Pkt

   (10) Sei der Markt arbitragefrei. Sei C ein Zahlungsanspruch, den man mit dem Anfangskapital V_0 superreplizieren kann. Zeigen Sie, 3 Pkt

$$V_0 \geq \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{C}{S_T^0}\right].$$

2. **Das konkrete Beispiel**

   Betrachten Sie das folgende Zwei-Perioden-Modell mit einer risikolosen Anlage S^0 und einer risikobehafteten Anlage S. Desweiteren sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, ..., 4\}$.

$$\begin{tikzcd} S_0^0 = 1 \arrow[r] & S_1^0 = \frac{5}{4} \arrow[r] & S_2^0 = \frac{4}{3} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = 12 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 10 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 5 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 8 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 5 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 4
\end{tikzcd}$$

(1) **Das Modell:**

(a) Schreiben Sie die von S erzeugte Filtrierung explizit hin. 1 Pkt

(b) Ist das Model arbitragefrei, vollständig?
Bestimmen Sie die äquivalenten Martingalmaße, falls sie existieren. Identifizieren Sie dabei $\mathbb{P}^*$ mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$, wobei $p_i = \mathbb{P}^*[\{\omega_i\}]$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Eindeutig? 4 Pkt

(2) **Europäische Option:**

(a) Wir betrachten den Zahlungsanspruch C

$$C(\omega_1) = \frac{16}{3}, \quad C(\omega_2) = \frac{4}{3}, \quad C(\omega_3) = \frac{4}{3}, \quad C(\omega_4) = 0.$$

Bestimmen Sie den diskontierten Preisprozess $(V_t)_{t=0,1,2}$. 4 Pkt

(b) Finden Sie eine replizierende Strategie $\overline{\xi} = (\xi_t^0, \xi_t)_{t=1,2}$ für die Option. Achten Sie auf klare Notation und definieren Sie sämtliche Bezeichnungen, die Sie verwenden und die keine Standardnotation aus der Vorlesung sind. Es muss klar hervorgehen, wie der Prozess $\overline{\xi}$ definiert ist. 6 Pkt

3. **Theoriefragen: Problem des optimalen Stoppens**

(1) Was ist eine Stoppzeit? 1 Pkt

(2) Formulieren Sie das Problem des optimalen Stoppens mit einem adaptierten integrierbaren Prozess $\{H_t\}_{t=0,\ldots,T}$. 1 Pkt

(3) Definieren Sie die Snell-Einhüllende für $\{H_t\}_{t=0,\ldots,T}$. Welche Eigenschaft hat sie? 2 Pkt

(4) Was ist die Lösung (sind die Lösungen) des Problems des optimalen Stoppens? Welche äquivalenten Eigenschaften haben sie? Wie finden Sie die kleinste und die größte Lösung? 4 Pkt

(5) Was ist der optimale Wert des Problems? 1 Pkt

4. **Theoriefragen: Amerikanische Option**

(a) Was ist eine amerikanische Option? Unterschied zu einer europäischen Option? 2 Pkt

(b) Wie bewerten wir eine Amerikanische Option in einem vollständigen Markt? 2 Pkt

(c) Sei $\{U_t\}_{t\in\{0,\cdots,T\}}$ der diskontierte Preisprozess für eine amerikanische Option mit Auszahlungen $\{H_t\}_{t\in\{0,\cdots,T\}}$.
Sei $\{C_t\}_{t\in\{0,\cdots,T\}}$ der diskontierte Preisprozess für die europäische Option mit Auszahlung H_T zu T. Das Modell sei arbitragefrei.
Beweisen Sie, dass $U_t \geq C_t$, f.s., für jedes $t \in \{0, \ldots, T\}$. 4 Pkt

(d) Definieren Sie die arbitragefreien Preise einer amerikanischen Option in einem unvollständigen Markt. Charakterisieren Sie die Menge der arbitragefreien Preise. 4 Pkt

5. **Das konkrete Beispiel: Amerikanische Option**

Betrachten Sie das Zwei-Perioden-Modell in der Aufgabe 2.

(1) Betrachten Sie den Zahlungsanspruch C der amerikanischen Option, der gegeben ist durch

$$C_0 = 1, \quad C_1(\omega_{1,2}) = 5, \quad C_2(\omega_{3,4}) = 0,$$
$$C_2(\omega_1) = \frac{16}{3}, \quad C_2(\omega_2) = \frac{4}{3}, \quad C_2(\omega_3) = \frac{4}{3}, \quad C_2(\omega_4) = 0.$$

Bestimmen Sie die diskontierten Preise dieser amerikanischen Option zum Zeitpunkt $t = 0, 1, 2$. 6 Pkt

(2) Berechnen Sie die minimale optimale Ausübungsstrategie $\tau_{\min}$, d.h. bestimmen Sie $\tau_{\min}(\omega_i)$, $i = 1, ..., 4$. 1 Pkt

(3) Was ist die Doob-Zerlegung eines Supermartingals? Bestimmen Sie die Doob-Zerlegung des diskontierten Preisprozesses. 6 Pkt

(4) Berechnen Sie die maximale optimale Ausübungsstrategie $\tau_{\max}$, d.h. bestimmen Sie $\tau_{\max}(\omega_i)$, $i = 1, ..., 4$. 1 Pkt