Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

# Finanzmathematik 1: diskrete Modelle (Vorlesungsprüfung) 20. September 2021

Dauer: 120 Minuten

Bei der schriftlichen Prüfung darf ein nicht programmierbarer Taschenrechner benutzt werden.

---

| Bsp. | Max. | Punkte |
|---|---|---|
| 1 | 62 | |
| 2 | 18 | |
| $\sum$ | 80 | |

**Note:**

1. **Zwei-Perioden-Modell: Arbitragefreiheit, Vollständigkeit, Optionsbewertung, Hedgenstrategie**

Betrachten Sie das folgende Zwei-Perioden-Modell mit einer risikolosen Anlage $S^0$ und einer risikobehafteten Anlage $S$. Desweiteren sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $P(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, ..., 4\}$.

$$\begin{tikzcd} S_0^0 = 1 \arrow[r] & S_1^0 = \frac{9}{8} \arrow[r] & S_2^0 = \frac{7}{6} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = 35 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 27 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 16 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 21 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 9 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 7
\end{tikzcd}$$

(1) **Theoriefragen: Mehr-Perioden-Modell**

(a) Welche Messbarkeit brauchen wir für die Handelsstrategie $\overline{\xi} = (\xi^0, \xi)$? Definition? 2 Pkt

(b) Was ist eine selbstfinanzierende Handelsstrategie? 1 Pkt

(c) Definieren Sie den diskontierten Wertprozess mit der Handelsstrategie $\overline{\xi}$ und dem diskontierten Preisprozess $X$ und stellen Sie diesen diskontierten Wertprozess als ein diskretes stochastisches Integral dar. 2 Pkt

(d) Was bedeutet eine Arbitragemöglichkeit im Mehr-Perioden-Modell? 1 Pkt

(e) Formulieren Sie die *Lokalisierung der Arbitrage* und den *ersten Hauptsatz zur Bewertung von Finanzinstrumenten* (auch die notwendige Definition, z.B. äquivalentes Martingalmaß). 4 Pkt

(f) Wie definieren Sie einen (diskontierten) arbitragefreien Preis eines (diskontierten) Zahlungsanspruchs? Wie bewerten Sie einen Zahlungsanspruch? 3 Pkt

(g) Definieren Sie die Erreichbarkeit eines diskontierten Zahlungsanspruchs $H$ und die Vollständigkeit eines Marktmodells. Formulieren Sie den *zweiten Hauptsatz zur Bewertung von Finanzinstrumenten.* 3 Pkt

(h) Diskutieren Sie über die Menge der arbitragefreien Preise in einem vollständigen und unvollständigen Markt. (*Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle, wenn $H$ erreichbar oder nicht erreichbar ist. Ist die Menge ein Intervall oder nur einpunktig?*) 3 Pkt

(i) Sei der Markt arbitrage-frei. Sei $C$ ein Zahlungsanspruch, den man mit dem Anfangskapital $V_0$ super-replizieren kann. Zeigen Sie, 2 Pkt

$$V_0 \geq \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} \mathbb{E}\left[\frac{C}{S_T^0}\right].$$

(2) **Das konkrete Beispiel: Das Modell**

(a) Schreiben Sie die von $S$ erzeugte Filtrierung explizit hin. 1 Pkt

(b) Ist das Model arbitragefrei, vollständig?
Bestimmen Sie die äquivalenten Martingalmaße, falls sie existieren. Identifizieren Sie dabei $P^*$ mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$, wobei $p_i = P^*[\{\omega_i\}]$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Eindeutig? 4 Pkt

(3) **Das konkrete Beispiel: Europäische Option**

(a) Wir betrachten die asiatische Kaufoption auf das Wertpapier $S$

$$C := \left( S_2 - \frac{1}{3} \sum_{t=0}^{2} S_t \right)^+ .$$

Bestimmen Sie den diskontierten Preisprozess $(V_t)_{t=0,1,2}$. 4 Pkt

(b) Finden Sie eine replizierende Strategie $\overline{\xi} = (\xi_t^0, \xi_t)_{t=1,2}$ für die Option. Achten Sie auf klare Notation und definieren Sie sämtliche Bezeichnungen, die Sie verwenden und die keine Standardnotation aus der Vorlesung sind. Es muss klar hervorgehen, wie der Prozess $\overline{\xi}$ definiert ist. 6 Pkt

(4) **Theoriefragen: Problem des optimalen Stoppens**

(a) Was ist eine Stoppzeit? 1 Pkt

(b) Formulieren Sie das Problem des optimalen Stoppens mit einem adaptierten integrierbaren Prozess $\{H_t\}_{t=0,\ldots,T}$. 1 Pkt

(c) Definieren Sie die Snell-Einhüllende für $\{H_t\}_{t=0,\ldots,T}$. Welche Eigenschaft hat sie? 2 Pkt

(d) Was ist die Lösung (sind die Lösungen) des Problems des optimalen Stoppens? Wie finden Sie die kleinste und die größte Lösung? 3 Pkt

(e) Was ist der optimale Wert des Problems? 1 Pkt

(5) **Das konkrete Beispiel: Amerikanische Option**

(a) Was ist eine amerikanische Option? Unterschied zu einer europäischen Option? 2 Pkt

(b) Sei $\{U_t\}_{t\in\{0,\cdots,T\}}$ der Preisprozess für eine amerikanische Option mit Auszahlungen $\{H_t\}_{t\in\{0,\cdots,T\}}$.
Sei $\{C_t\}_{t\in\{0,\cdots,T\}}$ der Preisprozess für die europäische Option mit Auszahlung $H_T$ zu $T$. Das Modell sei arbitrage-frei.
Beweisen Sie, dass $U_t \geq C_t$, f.s., for each $t \in \{0, \ldots, T\}$. 3 Pkt

(c) Es sei $X = S/S^0$ der diskontierte Preisprozess. Wir betrachten eine amerikanische Option mit diskontierten Auszahlungen $H_t = (12 - X_t)^+$, $t = 0, 1, 2$. Bestimmen Sie die diskontierten Preise dieser amerikanischen Option zum Zeitpunkt $t = 0, 1, 2$. 6 Pkt

(d) Berechnen Sie die minimale optimale Ausübungsstrategie $\tau_{\min}$, d.h. bestimmen Sie $\tau_{\min}(\omega_i)$, $i = 1, ..., 4$. 1 Pkt

(e) Was ist die Doob-Zerlegung eines Supermartingals? Bestimmen Sie die Doob-Zerlegung des diskontierten Preisprozesses. 5 Pkt

(f) Berechnen Sie die maximale optimale Ausübungsstrategie $\tau_{\max}$, d.h. bestimmen Sie $\tau_{\max}(\omega_i)$, $i = 1, ..., 4$. 1 Pkt

2. **Ein-Perioden-Modell: Arbitragefreiheit**

Wir betrachten das folgende Ein-Perioden-Modell $(S^0, S^1)$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dabei seien die risikolose Anlage durch $S_0^0 = S_1^0 = 1$ und die risikobehaftete Anlage durch $S_0^1 = 1$ und

$$S_1^1 = e^Z, \quad \text{mit} \quad Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{und} \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0,$$

gegeben.

(a) Für welche Parameter $\mu$ and $\sigma$ ist $P$ ein Martingalmaß? (*Hinweis: Die momenterzeugende Funktion $M_{\mathcal{N}(0,1)}$ der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung ist durch*

$$M_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

*gegeben.*) 4 Pkt

(b) Von nun an sei $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ under $P$. Für $\nu > 0$ finden Sie ein zu $P$ äuivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $P_\nu^*$, sodass $Z \sim N(\frac{-\nu^2}{2}, \nu^2)$ unter $P_\nu^*$ gilt. (*Hinweis: Versuchen Sie den Ansatz* $\frac{dP_\nu^*}{dP} = f_\nu(Z)$). 6 Pkt

(c) Sind die Maße $P_\nu^*$ äquivalente Martingalmaße? 4 Pkt

(d) Ist das hier betrachtete Modell arbitragefrei? Ist es vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort. 4 Pkt