Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle (Vorlesungsprüfung) 2. Juli 2021

Dauer: 120 Minuten

Bei der schriftlichen Prüfung darf ein nicht programmierbarer Taschenrechner benutzt werden.

Bsp.	Max.	Punkte
1	60	
2	20	
$\sum$	80	

Note:

1. **Zwei-Perioden-Modell: Arbitragefreiheit, Vollständigkeit, Optionsbewertung, Hedgenstrategie**

   Betrachten Sie das folgende Zwei-Perioden-Modell mit einer risikolosen Anlage S^0 und einer risikobehafteten Anlage S. Desweiteren sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $P(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, ..., 4\}$.

$$S_0^0 = 1 \longrightarrow S_1^0 = \tfrac{9}{8} \longrightarrow S_2^0 = \tfrac{7}{6}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = 35 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 27 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 16 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 21 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 9 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 7
\end{tikzcd}$$

   (1) **Theoriefragen: Mehr-Perioden-Modell**

   (a) Welche Messbarkeit brauchen wir für die Handelsstrategie $\overline{\xi} = (\xi^0, \xi)$? Definition? 2 Pkt

   (b) Was ist eine selbstfinanzierende Handelsstrategie? 1 Pkt

   (c) Definieren Sie den diskontierten Wertprozess mit der Handelsstrategie $\overline{\xi}$ und dem diskontierten Preisprozess X. 2 Pkt

   (d) Was bedeutet eine Arbitragemöglichkeit im Mehr-Perioden-Modell? 1 Pkt

   (e) Formulieren Sie die *Lokalisierung der Arbitrage* und den *ersten Hauptsatz zur Bewertung von Finanzinstrumenten* (auch die notwendige Definition, z.B. äquivalentes Martingalmaß). 4 Pkt

   (f) Wie definieren Sie einen (diskontierten) arbitragefreien Preis eines (diskontierten) Zahlungsanspruchs? Wie bewerten Sie einen Zahlungsanspruch? 3 Pkt

   (g) Definieren Sie die Erreichbarkeit eines diskontierten Zahlungsanspruchs H und die Vollständigkeit eines Marktmodells. Formulieren Sie den *zweiten Hauptsatz zur Bewertung von Finanzinstrumenten.* 3 Pkt

   (h) Diskutieren Sie über die Menge der arbitragefreien Preise in einem vollständigen und unvollständigen Markt. (*Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle, wenn H erreichbar oder nicht erreichbar ist. Ist die Menge ein Intervall oder nur einpunktig?*) 3 Pkt

   (2) **Das konkrete Beispiel: Das Modell**

   (a) Schreiben Sie die von S erzeugte Filtrierung explizit hin. 1 Pkt

   (b) Ist das Model arbitragefrei, vollständig?
   Bestimmen Sie die äquivalenten Martingalmaße, falls sie existieren. Identifizieren Sie dabei P^* mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$, wobei $p_i = P^*[\{\omega_i\}]$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Eindeutig? 4 Pkt

(3) **Das konkrete Beispiel: Europäische Option**

(a) Wir betrachten folgende europäische Barriere-Option mit Fälligkeit $T = 2$: eine down-and-out call mit dem Ausübungspreis $K = 14$ und knock-out level (=Barriere) $B = 15$, i.e.,

$$C^{\text{call}}_{\text{d\&o}} := \begin{cases} 0, & \min\limits_{0 \le t \le 2} S_t \le B, \\ (S_2 - K)^+, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie den diskontierten Preisprozess $(V_t)_{t=0,1,2}$. 4 Pkt

(b) Finden Sie eine replizierende Strategie $\overline{\xi} = (\xi_t^0, \xi_t)_{t=1,2}$ für die Barriere-Option. Achten Sie auf klare Notation und definieren Sie sämtliche Bezeichnungen, die Sie verwenden und die keine Standardnotation aus der Vorlesung sind. Es muss klar hervorgehen, wie der Prozess $\overline{\xi}$ definiert ist. 6 Pkt

(4) **Theoriefragen: Problem des optimalen Stoppens**

(a) Was ist eine Stoppzeit? 1 Pkt

(b) Formulieren Sie das Problem des optimalen Stoppens mit einem adaptierten integrierbaren Prozess $\{H_t\}_{t=0,\dots,T}$. 1 Pkt

(c) Definieren Sie die Snell-Einhüllende für $\{H_t\}_{t=0,\dots,T}$. Welche Eigenschaft hat sie? 3 Pkt

(d) Was ist die Lösung (sind die Lösungen) des Problems des optimalen Stoppens? Wie finden Sie die kleinste und die größte Lösung? 5 Pkt

(e) Was ist der optimale Wert des Problems? 1 Pkt

(5) **Das konkrete Beispiel: Amerikanische Option**

(a) Was ist eine amerikanische Option? Unterschied zu einer europäischen Option? 2 Pkt

(b) Es sei $X = S/S^0$ der diskontierte Preisprozess. Wir betrachten eine amerikanische Option mit diskontierten Auszahlungen $H_t = (12 - X_t)^+$, $t = 0, 1, 2$. Bestimmen Sie die diskontierten Preise dieser amerikanischen Option zum Zeitpunkt $t = 0, 1, 2$. 6 Pkt

(c) Berechnen Sie die minimale optimale Ausübungsstrategie $\tau_{\min}$, d.h. bestimmen Sie $\tau_{\min}(\omega_i)$, $i = 1, ..., 4$. 1 Pkt

(d) Was ist die Doob-Zerlegung eines Supermartingals? Bestimmen Sie die Doob-Zerlegung des diskontierten Preisprozesses. 5 Pkt

(e) Berechnen Sie die maximale optimale Ausübungsstrategie $\tau_{\max}$, d.h. bestimmen Sie $\tau_{\max}(\omega_i)$, $i = 1, ..., 4$. 1 Pkt

2. **Ein-Perioden-Modell: Arbitragefreiheit, Vollständigkeit, Optionsbewertung, (Super/Sub)Hedgen**

Es seien $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ gelte $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$. Das Preissystem zum Zeitpunkt $t = 0$ sei durch $\overline{\pi} = (\pi^0, \pi) = (1, 5)$ und zum Zeitpunkt $t = 1$ durch $\overline{S} = (S^0, S)$

$$\overline{S}(\omega_1) = \left(\frac{10}{9}, \frac{20}{3}\right), \qquad \overline{S}(\omega_2) = \left(\frac{10}{9}, \frac{40}{9}\right), \qquad \overline{S}(\omega_3) = \left(\frac{10}{9}, \frac{10}{3}\right)$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße. 4 Pkt

(b) Ist das Modell arbitragefrei, vorständig? 2 Pkt

(c) Betrachten Sie den Zahlungsanspruch $\big(C(\omega_1), C(\omega_2), C(\omega_3)\big) = (30, 20, 10)$.

- Ist der arbitragefreie Preis von C eindeutig? Bestimmen Sie den eindeutigen arbitragefreien Preis π^c. Falls die Preise nicht eindeutig sind, bestimmen Sie die Schranken π_{sup} und π_{inf} der arbitragefreien Preise. 3 Pkt
- Formulieren Sie den Super-/Subhedging-Satz. Bedeutung (es reicht, nur den Teil fürs Superhedging zu antworten)? 3 Pkt
- Finden Sie ein replizierendes Portfolio $\overline{\xi}$ mit $\overline{\xi} \cdot \overline{\pi} = \pi^c$ falls der Preis eindeutig ist. Andernfalls bestimmen Sie ein Subhedging-Portfolio $\overline{\xi}$ mit $\overline{\xi} \cdot \overline{\pi} = \pi_{\text{inf}}$ und ein Superhedging-Portfolio $\overline{\zeta}$ mit $\overline{\zeta} \cdot \overline{\pi} = \pi_{\text{sup}}$. 8 Pkt