

Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

**Finanzmathematik 1: Diskrete Modelle**  
**(Vorlesungsprüfung)**  
**24. Februar 2021**

Dauer: 120 Minuten

Bei der schriftlichen Prüfung darf ein nicht programmierbarer Taschenrechner benutzt werden.

---

Bsp.	Max.	Punkte
1	40	
2	60	
$\Sigma$	100	

**Note:**

1. Ein-Perioden-Modell: Arbitragefreiheit, Vollständigkeit, Optionsbewertung, (Super-/Sub-)Hedging

(1) Theoriefragen zum Ein-Perioden-Modell:

- (a) Was ist eine Arbitragemöglichkeit in einem Ein-Perioden-Modell? 1 Pkt
- (b) Was ist ein äquivalentes Martingalmaß? 1 Pkt
- (c) Formulieren Sie den ersten Hauptsatz zur Bewertung der Finanzinstrumente. 1 Pkt
- (d) Was ist ein Zahlungsanspruch (Claim)? 1 Pkt
- (e) Was ist eine europäische Kaufoption (Call Option)? Wie sieht ihre Auszahlungsfunktion (Payoff Function) aus? 2 Pkt
- (f) Wie definieren Sie einen (diskontierten) arbitragefreien Preis eines (diskontierten) Zahlungsanspruchs? Wie bewerten Sie einen Zahlungsanspruch? 2 Pkt
- (g) Was ist ein vollständiger Markt? Formulieren Sie den zweiten Hauptsatz zur Bewertung der Finanzinstrumente? 2 Pkt
- (h) Was bedeuten Super- und Subhedging? Wer versucht eine Super- oder Subhedgingstrategie zu finden? Warum? 3 Pkt
- (i) Formulieren Sie den Super- und Subhedgingsatz. Bedeutung (es reicht, nur den Teil fürs Subhedging zu antworten)? 3 Pkt
- (j) Diskutieren Sie die einzelnen Intervalle, wo arbitragefreie Preise existieren und wo man eine Super- oder Subhedgingstrategie bilden kann. 3 Pkt
- (k) Erklären Sie warum  $\pi_{\text{inf}}$  und  $\pi_{\text{sup}}$  keine arbitragefreien Preise sein können. 3 Pkt

- (2) Wir betrachten das folgende Ein-Perioden-Modell  $(S^0, S^1)$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Dabei seien die risikolose Anlage durch  $S_0^0 = S_1^0 = 1$  und die risikobehaftete Anlage durch  $S_0^1 = 1$  und

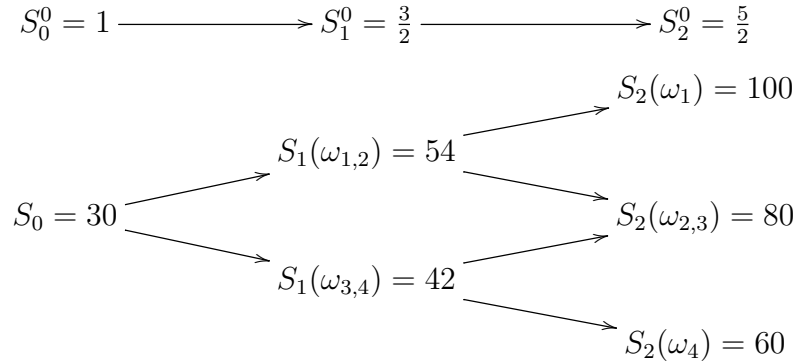
$$S_1^1 = Z, \quad \text{mit } Z \sim \text{Exp}(\lambda) \quad \text{und } \lambda > 0,$$

gegeben, wobei  $\text{Exp}(\lambda)$  die Exponentialverteilung bezeichnet, mit der Dichte  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  für  $x \geq 0$  und 0 sonst. (*Erwartungswert ist  $1/\lambda$ .*)

- (a) Für welche Parameter  $\lambda$  ist  $P$  ein Martingalmaß? 4 Pkt
- (b) Von nun an sei  $Z \sim \text{Exp}(2)$  unter  $P$ . Gibt es ein zu  $P$  ( $Z \sim \text{Exp}(2)$  unter  $P$ ) äquivalentes Maß  $P_{b,p}^*$  so dass  $Z \sim \Gamma(b, p)$  mit  $b, p > 0$ , wobei  $\Gamma(b, p)$  die Gammaverteilung bezeichnet (mit Dichte  $g(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx}$  für  $x \geq 0$  und 0 sonst.) Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn ja, für welche Parameter  $b, p$  ist  $P_{b,p}^*$  risikoneutral? (*Der Erwartungswert einer Gammaverteilten Zufallsvariable ist  $\frac{p}{b}$ .*) 10 Pkt
- (c) Ist das hier betrachtete Modell arbitragefrei? Ist es vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort. 4 Pkt

## 2. Zwei-Perioden-Modell

Betrachten Sie das folgende Zwei-Perioden-Modell mit einer risikolosen Anlage  $S^0$  und einer risikobehafteten Anlage  $S$ . Desweiteren sei  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ,  $P(\omega_i) > 0$  für  $i \in \{1, \dots, 4\}$ .



### (1) Theoriefragen: Mehr-Perioden-Modell

- Welche Messbarkeit brauchen wir für die Handelsstrategie  $\bar{\xi} = (\xi^0, \xi)$ ? Definition? 2 Pkt
- Was ist eine selbstfinanzierende Handelsstrategie? 1 Pkt
- Definieren Sie den diskontierten Wertprozess mit der Handelsstrategie  $\bar{\xi}$  und dem diskontierten Preisprozess  $X$ . 2 Pkt
- Was bedeutet eine Arbitragemöglichkeit im Mehr-Perioden-Modell? 1 Pkt
- Formulieren Sie die *Lokalisierung der Arbitrage* und den *ersten Hauptsatz zur Bewertung von Finanzinstrumenten* (auch die notwendige Definition, z.B. äquivalentes Martingalmaß). 4 Pkt
- Wie definieren Sie einen (diskontierten) arbitragefreien Preis eines (diskontierten) Zahlungsanspruchs? Wie bewerten Sie einen Zahlungsanspruch? 3 Pkt
- Definieren Sie die Erreichbarkeit eines diskontierten Zahlungsanspruchs  $H$  und die Vollständigkeit eines Marktmodells. Formulieren Sie den *zweiten Hauptsatz zur Bewertung von Finanzinstrumenten*. 3 Pkt
- Diskutieren Sie über die Menge der arbitragefreien Preise in einem vollständigen und unvollständigen Markt. (*Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle, wenn  $H$  erreichbar oder nicht erreichbar ist. Ist die Menge ein Intervall oder nur einpunktig?*) 3 Pkt

### (2) Das konkrete Beispiel: Das Modell

- Schreiben Sie die von  $S$  erzeugte Filtrierung explizit hin. 1 Pkt
- Ist das Modell arbitragefrei, vollständig? Bestimmen Sie die äquivalenten Martingalmaße, falls sie existieren. Identifizieren Sie dabei  $P^*$  mit  $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$ , wobei  $p_i = P^*[\{\omega_i\}]$  für  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Eindeutig? 4 Pkt

### (3) Das konkrete Beispiel: Europäische Option

- (a) Bewerten Sie den arbitragefreien Preis des Zahlungsanspruchs  $C(\omega_1) = 90$ ,  $C(\omega_2) = C(\omega_3) = 70$ ,  $C(\omega_4) = 45$ . 4 Pkt
- (b) Ist die Option erreichbar? Falls ja, bestimmen Sie die replizierende Strategie. 6 Pkt
- (4) Theoriefragen: Problem des optimalen Stoppens**
- (a) Was ist eine Stoppzeit? 1 Pkt
- (b) Formulieren Sie das Problem des optimalen Stoppens mit einem adaptierten integrierbaren Prozess  $\{H_t\}_{t=0,\dots,T}$ . 1 Pkt
- (c) Definieren Sie die Snell-Einhüllende für  $\{H_t\}_{t=0,\dots,T}$ . Welche Eigenschaft hat sie? 3 Pkt
- (d) Was ist die Lösung (sind die Lösungen) des Problems des optimalen Stoppens? Wie finden Sie die kleinste und die größte Lösung? 5 Pkt
- (e) Was ist der optimale Wert des Problems? 1 Pkt
- (5) Das konkrete Beispiel: Amerikanische Option**
- (a) Was ist eine amerikanische Option? Unterschied zu einer europäischen Option? 2 Pkt
- (b) Betrachten Sie eine amerikanische Option mit den Auszahlungen
- $$C_0 = 0,$$
- $$C_1(\omega_{1,2}) = 48, \quad C_1(\omega_{3,4}) = 30$$
- $$C_2(\omega_1) = 90, \quad C_2(\omega_{2,3}) = 70, \quad C_2(\omega_4) = 45.$$
- und bestimmen Sie die diskontierten Preise dieser amerikanischen Option zur Zeit  $t = 0, 1, 2$ . 6 Pkt
- (c) Berechnen Sie die minimale optimale Ausübungsstrategie  $\tau_{\min}$ , d.h. bestimmen Sie  $\tau_{\min}(\omega_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . 1 Pkt
- (d) Was ist die Doob-Zerlegung eines Supermartingals? Bestimmen Sie die Doob-Zerlegung des diskontierten Preisprozesses. 5 Pkt
- (e) Berechnen Sie die maximale optimale Ausübungsstrategie  $\tau_{\max}$ , d.h. bestimmen Sie  $\tau_{\max}(\omega_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . 1 Pkt