

Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: Diskrete Modelle
(Vorlesungsprüfung)
24. Februar 2021

Dauer: 120 Minuten

Bei der schriftlichen Prüfung darf ein nicht programmierbarer Taschenrechner benutzt werden.

Bsp.	Max.	Punkte
1	40	
2	60	
Σ	100	

Note:

1. Ein-Perioden-Modell: Arbitragefreiheit, Vollständigkeit, Optionsbewertung, (Super-/Sub-)Hedging

(1) Theoriefragen zum Ein-Perioden-Modell:

- (a) Was ist eine Arbitragemöglichkeit in einem Ein-Perioden-Modell? 1 Pkt
- (b) Was ist ein äquivalentes Martingalmaß? 1 Pkt
- (c) Formulieren Sie den ersten Hauptsatz zur Bewertung der Finanzinstrumente. 1 Pkt
- (d) Was ist ein Zahlungsanspruch (Claim)? 1 Pkt
- (e) Was ist eine europäische Kaufoption (Call Option)? Wie sieht ihre Auszahlungsfunktion (Payoff Function) aus? 2 Pkt
- (f) Wie definieren Sie einen (diskontierten) arbitragefreien Preis eines (diskontierten) Zahlungsanspruchs? Wie bewerten Sie einen Zahlungsanspruch? 2 Pkt
- (g) Was ist ein vollständiger Markt? Formulieren Sie den zweiten Hauptsatz zur Bewertung der Finanzinstrumente? 2 Pkt
- (h) Was bedeuten Super- und Subhedging? Wer versucht eine Super- oder Subhedgingstrategie zu finden? Warum? 3 Pkt
- (i) Formulieren Sie den Super- und Subhedgingsatz. Bedeutung (es reicht, nur den Teil fürs Subhedging zu antworten)? 3 Pkt
- (j) Diskutieren Sie die einzelnen Intervalle, wo arbitragefreie Preise existieren und wo man eine Super- oder Subhedgingstrategie bilden kann. 3 Pkt
- (k) Erklären Sie warum π_{inf} und π_{sup} keine arbitragefreien Preise sein können. 3 Pkt

- (2) Wir betrachten das folgende Ein-Perioden-Modell (S^0, S^1) auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) . Dabei seien die risikolose Anlage durch $S_0^0 = S_1^0 = 1$ und die risikobehaftete Anlage durch $S_0^1 = 1$ und

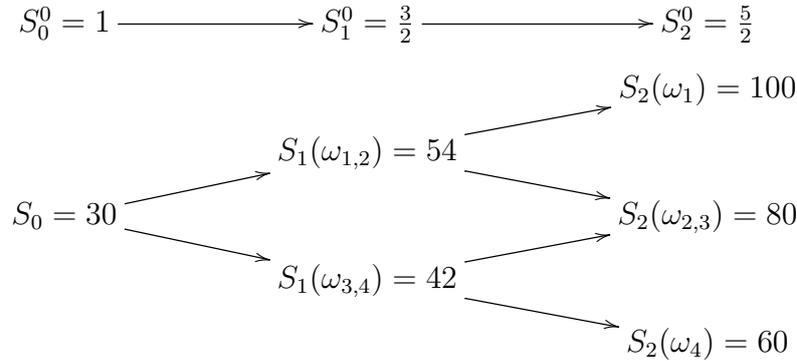
$$S_1^1 = Z, \quad \text{mit } Z \sim \text{Exp}(\lambda) \quad \text{und } \lambda > 0,$$

gegeben, wobei $\text{Exp}(\lambda)$ die Exponentialverteilung bezeichnet, mit der Dichte $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$ und 0 sonst. (*Erwartungswert ist $1/\lambda$.*)

- (a) Für welche Parameter λ ist P ein Martingalmaß? 4 Pkt
- (b) Von nun an sei $Z \sim \text{Exp}(2)$ unter P . Gibt es ein zu P ($Z \sim \text{Exp}(2)$ unter P) äquivalentes Maß $P_{b,p}^*$ so dass $Z \sim \Gamma(b, p)$ mit $b, p > 0$, wobei $\Gamma(b, p)$ die Gammaverteilung bezeichnet (mit Dichte $g(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx}$ für $x \geq 0$ und 0 sonst.) Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn ja, für welche Parameter b, p ist $P_{b,p}^*$ risikoneutral? (*Der Erwartungswert einer Gammaverteilten Zufallsvariable ist $\frac{p}{b}$.*) 10 Pkt
- (c) Ist das hier betrachtete Modell arbitragefrei? Ist es vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort. 4 Pkt

2. Zwei-Perioden-Modell

Betrachten Sie das folgende Zwei-Perioden-Modell mit einer risikolosen Anlage S^0 und einer risikobehafteten Anlage S . Desweiteren sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $P(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, \dots, 4\}$.



(1) Theoriefragen: Mehr-Perioden-Modell

- Welche Messbarkeit brauchen wir für die Handelsstrategie $\bar{\xi} = (\xi^0, \xi)$? Definition? 2 Pkt
- Was ist eine selbstfinanzierende Handelsstrategie? 1 Pkt
- Definieren Sie den diskontierten Wertprozess mit der Handelsstrategie $\bar{\xi}$ und dem diskontierten Preisprozess X . 2 Pkt
- Was bedeutet eine Arbitragemöglichkeit im Mehr-Perioden-Modell? 1 Pkt
- Formulieren Sie die *Lokalisierung der Arbitrage* und den *ersten Hauptsatz zur Bewertung von Finanzinstrumenten* (auch die notwendige Definition, z.B. äquivalentes Martingalmaß). 4 Pkt
- Wie definieren Sie einen (diskontierten) arbitragefreien Preis eines (diskontierten) Zahlungsanspruchs? Wie bewerten Sie einen Zahlungsanspruch? 3 Pkt
- Definieren Sie die Erreichbarkeit eines diskontierten Zahlungsanspruchs H und die Vollständigkeit eines Marktmodells. Formulieren Sie den *zweiten Hauptsatz zur Bewertung von Finanzinstrumenten*. 3 Pkt
- Diskutieren Sie über die Menge der arbitragefreien Preise in einem vollständigen und unvollständigen Markt. (*Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle, wenn H erreichbar oder nicht erreichbar ist. Ist die Menge ein Intervall oder nur einpunktig?*) 3 Pkt

(2) Das konkrete Beispiel: Das Modell

- Schreiben Sie die von S erzeugte Filtrierung explizit hin. 1 Pkt
- Ist das Model arbitragefrei, vollständig? Bestimmen Sie die äquivalenten Martingalmaße, falls sie existieren. Identifizieren Sie dabei P^* mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$, wobei $p_i = P^*[\{\omega_i\}]$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Eindeutig? 4 Pkt

(3) Das konkrete Beispiel: Europäische Option

- (a) Bewerten Sie den arbitragefreien Preis des Zahlungsanspruchs $C(\omega_1) = 90$, $C(\omega_2) = C(\omega_3) = 70$, $C(\omega_4) = 45$. 4 Pkt
- (b) Ist die Option erreichbar? Falls ja, bestimmen Sie die replizierende Strategie. 6 Pkt
- (4) Theoriefragen: Problem des optimalen Stoppens**
- (a) Was ist eine Stoppzeit? 1 Pkt
- (b) Formulieren Sie das Problem des optimalen Stoppens mit einem adaptierten integrierbaren Prozess $\{H_t\}_{t=0,\dots,T}$. 1 Pkt
- (c) Definieren Sie die Snell-Einhüllende für $\{H_t\}_{t=0,\dots,T}$. Welche Eigenschaft hat sie? 3 Pkt
- (d) Was ist die Lösung (sind die Lösungen) des Problems des optimalen Stoppens? Wie finden Sie die kleinste und die größte Lösung? 5 Pkt
- (e) Was ist der optimale Wert des Problems? 1 Pkt
- (5) Das konkrete Beispiel: Amerikanische Option**
- (a) Was ist eine amerikanische Option? Unterschied zu einer europäischen Option? 2 Pkt
- (b) Betrachten Sie eine amerikanische Option mit den Auszahlungen
- $$C_0 = 0,$$
- $$C_1(\omega_{1,2}) = 48, \quad C_1(\omega_{3,4}) = 30$$
- $$C_2(\omega_1) = 90, \quad C_2(\omega_{2,3}) = 70, \quad C_2(\omega_4) = 45.$$
- und bestimmen Sie die diskontierten Preise dieser amerikanischen Option zur Zeit $t = 0, 1, 2$. 6 Pkt
- (c) Berechnen Sie die minimale optimale Ausübungsstrategie τ_{\min} , d.h. bestimmen Sie $\tau_{\min}(\omega_i)$, $i = 1, \dots, 4$. 1 Pkt
- (d) Was ist die Doob-Zerlegung eines Supermartingals? Bestimmen Sie die Doob-Zerlegung des diskontierten Preisprozesses. 5 Pkt
- (e) Berechnen Sie die maximale optimale Ausübungsstrategie τ_{\max} , d.h. bestimmen Sie $\tau_{\max}(\omega_i)$, $i = 1, \dots, 4$. 1 Pkt