Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: Diskrete Modelle
(Vorlesungsprüfung)
18. Dezember 2020

Dauer: 120 Minuten

Bei der schriftlichen Prüfung darf ein nicht programmierbarer Taschenrechner benutzt werden.

Bsp.	Max.	Punkte
1	40	
2	60	
$\sum$	100	

Note:

1. **Ein-Perioden-Modell: Arbitragefreiheit, Vollständigkeit, Optionsbewertung, (Super-/Sub-)Hedging**

   (1) **Theoriefragen zum Ein-Perioden-Modell**:

   (a) Was ist eine Arbitragemöglichkeit in einem Ein-Perioden-Modell? 1 Pkt

   (b) Was ist ein äquivalentes Martingalmaß? 1 Pkt

   (c) Formulieren Sie den ersten Hauptsatz zur Bewertung der Finanzinstrumente. 1 Pkt

   (d) Was ist ein Zahlungsanspruch (Claim)? 1 Pkt

   (e) Was ist eine europäische Kaufoption (Call Option)? Wie sieht ihre Auszahlungsfunktion (Payoff Function) aus? 2 Pkt

   (f) Wie definieren Sie einen (diskontierten) arbitragefreien Preis eines (diskontierten) Zahlungsanspruchs? Wie bewerten Sie einen Zahlungsanspruch? 2 Pkt

   (g) Was ist ein vollständiger Markt? Formulieren Sie den zweiten Hauptsatz zur Bewertung der Finanzinstrumente? 2 Pkt

   (h) Was bedeuten Super- und Subhedging? Wer versucht eine Super- oder Subhedgingstrategie zu finden? Warum? 3 Pkt

   (i) Formulieren Sie den Super- und Subhedgingsatz. Bedeutung (es reicht, nur den Teil fürs Subhedging zu antworten)? 3 Pkt

   (j) Diskutieren Sie die einzelnen Intervalle, wo arbitragefreie Preise existieren und wo man eine Super- oder Subhedgingstrategie bilden kann. 3 Pkt

   (k) Erklären Sie warum $\pi_{\inf}$ und $\pi_{\sup}$ keine arbitragefreien Preise sein können. 3 Pkt

   (2) Wir betrachten das folgende Ein-Perioden-Modell (S^0, S^1) auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dabei seien die risikolose Anlage durch $S_0^0 = S_1^0 = 1$ und die risikobehaftete Anlage durch $S_0^1 = 1$ und

$$S_1^1 = e^Z, \quad \text{mit} \quad Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{und} \quad \mu \in \mathbb{R}, \ \ \sigma > 0,$$

   gegeben.

   (a) Für welche Parameter μ and σ ist P ein Martingalmaß? (*Hinweis: Die momenterzeugende Funktion $M_{\mathcal{N}(0,1)}$ der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung ist durch*

$$M_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

   gegeben.) 4 Pkt

   (b) Von nun an sei $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ under P. Für $\nu > 0$ finden Sie ein zu P äuivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß P_ν^*, sodass $Z \sim N(\frac{-\nu^2}{2}, \nu^2)$ unter P_ν^* gilt. (*Hinweis: Versuchen Sie den Ansatz* $\frac{dP_\nu^*}{dP} = f_\nu(Z)$). 6 Pkt

   (c) Sind die Maße P_ν^* äquivalente Martingalmaße? 4 Pkt

   (d) Ist das hier betrachtete Modell arbitragefrei? Ist es vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort. 4 Pkt

2. **Zwei-Perioden-Modell**

Betrachten Sie das folgende Zwei-Perioden-Modell mit einer risikolosen Anlage S^0 und einer risikobehafteten Anlage S. Desweiteren sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $P(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, ..., 4\}$.

$$\begin{tikzcd}
S_0^0 = 1 \arrow[r] & S_1^0 = \frac{3}{2} \arrow[r] & S_2^0 = \frac{5}{2}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = 100 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 54 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 30 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 80 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 42 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 60
\end{tikzcd}$$

(1) **Theoriefragen: Mehr-Perioden-Modell**

(a) Welche Messbarkeit brauchen wir für die Handelsstrategie $\overline{\xi} = (\xi^0, \xi)$? Definition? 2 Pkt

(b) Was ist eine selbstfinanzierende Handelsstrategie? 1 Pkt

(c) Definieren Sie den diskontierten Wertprozess mit der Handelsstrategie $\overline{\xi}$ und dem diskontierten Preisprozess X. 2 Pkt

(d) Was bedeutet eine Arbitragemöglichkeit im Mehr-Perioden-Modell? 1 Pkt

(e) Formulieren Sie die *Lokalisierung der Arbitrage* und den *ersten Hauptsatz zur Bewertung von Finanzinstrumenten* (auch die notwendige Definition, z.B. äquivalentes Martingalmaß). 4 Pkt

(f) Wie definieren Sie einen (diskontierten) arbitragefreien Preis eines (diskontierten) Zahlungsanspruchs? Wie bewerten Sie einen Zahlungsanspruch? 3 Pkt

(g) Definieren Sie die Erreichbarkeit eines diskontierten Zahlungsanspruchs H und die Vollständigkeit eines Marktmodells. Formulieren Sie den *zweiten Hauptsatz zur Bewertung von Finanzinstrumenten.* 3 Pkt

(h) Diskutieren Sie über die Menge der arbitragefreien Preise in einem vollständigen und unvollständigen Markt. (*Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle, wenn H erreichbar oder nicht erreichbar ist. Ist die Menge ein Intervall oder nur einpunktig?*) 3 Pkt

(2) **Das konkrete Beispiel: Das Modell**

(a) Schreiben Sie die von S erzeugte Filtrierung explizit hin. 1 Pkt

(b) Ist das Model arbitragefrei, vollständig? Bestimmen Sie die äquivalenten Martingalmaße, falls sie existieren. Identifizieren Sie dabei P^* mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$, wobei $p_i = P^*[\{\omega_i\}]$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Eindeutig? 4 Pkt

(3) **Das konkrete Beispiel: Europäische Option**

(a) Bewerten Sie den arbitragefreien Preis des Zahlungsanspruchs $C(\omega_1) = 90$, $C(\omega_2) = C(\omega_3) = 70$, $C(\omega_4) = 45$. 4 Pkt

(b) Ist die Option erreichbar? Falls ja, bestimmen Sie die replizierende Strategie. 6 Pkt

(4) **Theoriefragen: Problem des optimalen Stoppens**

(a) Was ist eine Stoppzeit? 1 Pkt

(b) Formulieren Sie das Problem des optimalen Stoppens mit einem adaptierten integrierbaren Prozess $\{H_t\}_{t=0,...,T}$. 1 Pkt

(c) Definieren Sie die Snell-Einhüllende für $\{H_t\}_{t=0,...,T}$. Welche Eigenschaft hat sie? 3 Pkt

(d) Was ist die Lösung (sind die Lösungen) des Problems des optimalen Stoppens? Wie finden Sie die kleinste und die größte Lösung? 5 Pkt

(e) Was ist der optimale Wert des Problems? 1 Pkt

(5) **Das konkrete Beispiel: Amerikanische Option**

(a) Was ist eine amerikanische Option? Unterschied zu einer europäischen Option? 2 Pkt

(b) Betrachten Sie eine amerikanische Option mit den Auszahlungen

$$\begin{aligned} C_0 &= 0, \\ C_1(\omega_{1,2}) &= 48, \quad C_1(\omega_{3,4}) = 30 \\ C_2(\omega_1) &= 90, \quad C_2(\omega_{2,3}) = 70, \quad C_2(\omega_4) = 45. \end{aligned}$$

und bestimmen Sie die diskontierten Preise dieser amerikanischen Option zur Zeit $t = 0, 1, 2$. 6 Pkt

(c) Berechnen Sie die minimale optimale Ausübungsstrategie $\tau_{\min}$, d.h. bestimmen Sie $\tau_{\min}(\omega_i)$, $i = 1, ..., 4$. 1 Pkt

(d) Was ist die Doob-Zerlegung eines Supermartingals? Bestimmen Sie die Doob-Zerlegung des diskontierten Preisprozesses. 5 Pkt

(e) Berechnen Sie die maximale optimale Ausübungsstrategie $\tau_{\max}$, d.h. bestimmen Sie $\tau_{\max}(\omega_i)$, $i = 1, ..., 4$. 1 Pkt