Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

# Finanzmathematik 1: diskrete Modelle (Vorlesungsprüfung) 24. Februar 2020

Dauer: 120 Minuten

Bei der schriftlichen Prüfung darf ein nicht programmierbarer Taschenrechner benutzt werden.

---

| Bsp. | Max. | Punkte |
|---|---|---|
| 1 | 70 | |
| 2 | 30 | |
| $\sum$ | 100 | |

**Note:**

1. **Zwei-Perioden-Modell**

Betrachten Sie das folgende Zwei-Perioden-Modell mit einer risikolosen Anlage $S^0$ und einer risikobehafteten Anlage $S$. Desweiteren sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $P(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, ..., 4\}$.

$$S_0^0 = 1 \longrightarrow S_1^0 = \frac{4}{3} \longrightarrow S_2^0 = \frac{5}{3}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = 240 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 160 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 100 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 120 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 80 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 80
\end{tikzcd}$$

(1) **Theoriefragen: Mehr-Perioden-Modell**

(a) Welche Messbarkeit brauchen wir für die Handelsstrategie $\overline{\xi} = (\xi^0, \xi)$? Definition? 3 Pkt

(b) Was ist eine selbstfinanzierende Handelsstrategie? 2 Pkt

(c) Definieren Sie den diskontierten Wertprozess mit der Handelsstrategie $\overline{\xi}$ and dem diskontierten Preisprozess $X$. 2 Pkt

(d) Was bedeutet eine Arbitragemöglichkeit im Mehr-Perioden-Modell? 2 Pkt

(e) Formulieren Sie "Lokalisierung der Arbitrage" und den ersten Hauptsatz (auch die notwendige Definition, z.B., äquivalentes Martingalmaß). 4 Pkt

(f) Wie definieren Sie einen (diskontierten) arbitragefreien Preis eines (diskontierten) Zahlungsanspruchs? Wie bewerten Sie einen Zahlungsanspruch? 4 Pkt

(g) Definieren Sie die Erreichbarkeit eines diskontierten Zahlungsanspruchs $H$ und die Vollständigkeit eines Marktmodells. Formulieren Sie den zweiten Hauptsatz. 6 Pkt

(h) Diskutieren Sie über die Menge der arbitragefreien Preise in einem vollständigen und unvollständigen Markt. (*Hinweis: unterscheiden Sie die Fälle, wenn $H$ erreichbar oder nicht erreichbar ist. Ist die Menge ein Intervall oder nur einpunktig?*) 3 Pkt

(2) **Das konkrete Beispiel: das Modell**

(a) Schreiben Sie die von $S$ erzeugte Filtrierung explizit hin. 2 Pkt

(b) Ist das Model arbitragefrei, vollständig? Bestimmen Sie die äquivalenten Martingalmaße, falls sie existieren. Identifizieren Sie dabei $\mathbb{P}^*$ mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$, wobei $p_i = \mathbb{P}^*[\{\omega_i\}]$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Eindeutig? 5 Pkt

(3) **Das konkrete Beispiel: Europäische Option**

(a) Bewerten Sie eine europäische Verkaufsoption auf das Wertpapier $S$ mit dem Ausübungspreis (Strike) $K = 100$ und Fälligkeitsdatum $T = 2$. 4 Pkt

(b) Ist die Option replizierbar? Falls ja, bestimmen Sie die replizierende Strategie. 7 Pkt

(4) **Theoriefragen: Problem des optimalen Stopps,**

(a) Was ist eine Stoppzeit? 1 Pkt

(b) Formulieren Sie das Problem des optimalen Stopps mit einem adaptierten integrierbaren Prozess $\{H_t\}_{t=0,...,T}$. 1 Pkt

(c) Definieren Sie die Snell-Einhüllende für $\{H_t\}_{t=0,...,T}$. Welche Eigenschaft hat sie? 3 Pkt

(d) Was ist die Lösung (sind die Lösungen) des Problems des optimalen Stopps? Wie finden Sie die kleinste und die größte Lösung? 5 Pkt

(e) Was ist der Wert des Problems? 1 Pkt

(5) **Das konkrete Beispiel: Amerikanische Option**

(a) Was ist eine amerikanische Option? Unterschied zu einer europäischen Option? 2 Pkt

(b) Bestimmen Sie die Preise der amerikanischen Option zur Zeit $t = 0, 1, 2$. 6 Pkt

(c) Berechnen Sie die minimale optimale Ausübungsstrategie $\tau_{\min}$, d.h. bestimmen Sie $\tau_{\min}(\omega_i)$, $i = 1, ..., 4$. 1 Pkt

(d) Was ist die Doob-Zerlegung eines Supermartingales? Bestimmen Sie die Doob-Zerlegung des Preisprozesses. 5 Pkt

(e) Berechnen Sie die maximale optimale Ausübungsstrategie $\tau_{\max}$, d.h. bestimmen Sie $\tau_{\max}(\omega_i)$, $i = 1, ..., 4$. 1 Pkt

2. **Ein-Perioden-Modell: Arbitragefreiheit, Vollständigkeit, Optionsbewertung, (Super/Sub)Hedgen**

Es seien $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von $\Omega$. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ gelte $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$. Das Preissystem zum Zeitpunkt $t = 0$ sei durch $\overline{\pi} = (\pi^0, \pi) = (1, 5)$ und zum Zeitpunkt $t = 1$ durch $\overline{S} = (S^0, S)$

$$\overline{S}(\omega_1) = \left(\frac{10}{9}, \frac{20}{3}\right), \qquad \overline{S}(\omega_2) = \left(\frac{10}{9}, \frac{40}{9}\right), \qquad \overline{S}(\omega_3) = \left(\frac{10}{9}, \frac{10}{3}\right)$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße. 5 Pkt

(b) Ist das Modell arbitragefrei, vorständig? 4 Pkt

(c) Betrachten Sie den Zahlungsanspruch $\big(C(\omega_1), C(\omega_2), C(\omega_3)\big) = (30, 20, 10)$.

- Ist $C$ erreichbar? 3 Pkt
- Ist der arbitragefreie Preis von $C$ eindeutig? Bestimmen Sie den eindeutigen arbitragefreien Preis $\pi^c$. Falls die Preise nicht eindeutig sind, bestimmen Sie die Schranken $\pi_{\text{sup}}$ und $\pi_{\text{inf}}$ der arbitragefreien Preise. 3 Pkt
- Formulieren Sie den Super/Subhedgensatz. Bedeutung (es reicht, nur den Teil fürs Superhedgen zu antworten)? 6 Pkt
- Sei $m \geq 0$. Zeigen Sie: Falls es ein Portfolio $\overline{\xi}$ existiert, so dass $\overline{\xi} \cdot \overline{S} \geq C$, f.s., dann haben wir $m \geq \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\frac{C}{1+r}]$. 3 Pkt
- Finden Sie ein replizierendes Portfolio $\overline{\xi}$ mit $\overline{\xi} \cdot \overline{\pi} = \pi^c$ falls der Preis eindeutig ist. Andernfalls bestimmen Sie ein Subhedgenportfolio $\overline{\xi}$ mit $\overline{\xi} \cdot \overline{\pi} = \pi_{\text{inf}}$ und ein Superhedgenportfolio $\overline{\zeta}$ mit $\overline{\zeta} \cdot \overline{\pi} = \pi_{\text{sup}}$. 6 Pkt