Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle
(Vorlesungsprüfung)
23. September 2019

Dauer: 120 Minuten

Bei der schriftlichen Prüfung darf ein nicht programmierbarer Taschenrechner benutzt werden.

Bsp.	Max.	Punkte
1	40	
2	30	
3	30	
$\sum$	100	

Note:

1. **Ein-Perioden-Modell: Arbitragefreiheit, Vollständigkeit, Optionsbewertung, (Super/Sub)Hedgen**

Es seien $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ gelte $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$. Das Preissystem zum Zeitpunkt $t = 0$ sei durch $\overline{\pi} = (\pi^0, \pi) = (1, 5)$ und zum Zeitpunkt $t = 1$ durch $\overline{S} = (S^0, S)$

$$\overline{S}(\omega_1) = \left(\frac{10}{9}, \frac{20}{3}\right), \qquad \overline{S}(\omega_2) = \left(\frac{10}{9}, \frac{40}{9}\right), \qquad \overline{S}(\omega_3) = \left(\frac{10}{9}, \frac{10}{3}\right)$$

gegeben.

(a) Was ist eine Arbitragemöglichkeit? Was ist ein äquivalentes Martingalmaß? 4 Pkt

(b) Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße. 5 Pkt

(c) Zeigen Sie, dass das Modell arbitragefrei ist. Mit welchem Satz zeigen Sie diese Aussage? Was besagt dieser Satz? 4 Pkt

(d) Was bedeutet die Vollständigkeit? Ist das Marktmodell vollständig? Mit welchem Satz zeigen Sie Ihre Aussage? Was besagt dieser Satz? 6 Pkt

(e) Was heißt erreichbar? Welche Zahlungsansprüche $\big(C(\omega_1), C(\omega_2), C(\omega_3)\big)$ sind erreichbar? 4 Pkt

(f) Betrachten Sie den Zahlungsanspruch $\big(C(\omega_1), C(\omega_2), C(\omega_3)\big) = (30, 20, 10)$.

- Ist C erreichbar? 2 Pkt
- Wie bestimmen Sie den Preis (die Preise) einer Zahlungsanspruch? 2 Pkt
- Ist der arbitragefreie Preis von C eindeutig? Bestimmen Sie den eindeutigen arbitragefreien Preis π^c. Falls die Preise nicht eindeutig sind, bestimmen Sie die Schranken π_{sup} und π_{inf} der arbitragefreien Preise. 3 Pkt
- Formulieren Sie den Super/Subhedgensatz. Bedeutung (es reicht, nur den Teil fürs Superhedgen zu antworten)? 2 Pkt
- Finden Sie ein replizierendes Portfolio $\overline{\xi}$ mit $\overline{\xi} \cdot \overline{\pi} = \pi^c$ falls der Preis eindeutig ist. Andernfalls bestimmen Sie ein Subhedgenportfolio $\overline{\xi}$ mit $\overline{\xi} \cdot \overline{\pi} = \pi_{\text{inf}}$ und ein Superhedgenportfolio $\overline{\zeta}$ mit $\overline{\zeta} \cdot \overline{\pi} = \pi_{\text{sup}}$. 8 Pkt

2. **Zwei-Perioden-Modell: Arbitragefreiheit, Vollständigkeit, Optionsbewertung, Hedgenstrategie**

Betrachten Sie das folgende Zwei-Perioden-Modell mit einer risikolosen Anlage S^0 und einer risikobehafteten Anlage S. Desweiteren sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $P(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, ..., 4\}$.

$$S_0^0 = 1 \longrightarrow S_1^0 = \tfrac{9}{8} \longrightarrow S_2^0 = \tfrac{7}{6}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = 35 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 27 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 16 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 21 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 9 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 7
\end{tikzcd}$$

(a) Schreiben Sie die von S erzeugte Filtrierung explizit hin. 2 Pkt

(b) Welche Messbarkeit brauchen wir für die Handelsstrategie $\overline{\xi} = (\xi^0, \xi)$? Definition? 3 Pkt

(c) Was ist eine selbstfinanzierende Handelsstrategie? 2 Pkt

(d) Was ist eine Arbitragemöglichkeit hier? 2 Pkt

(e) Formulieren Sie "Lokalisierung der Arbitrage" und den ersten Hauptsatz (auch die notwendige Definition, z.B., äquivalentes Martingalmaß). 2 Pkt

(f) Was ist ein arbitragefreier Preis einer Zahlungsanspruch? Wie bewerten wir einen Zahlungsanspruch? 4 Pkt

(g) Ist das Model arbitragefrei, vollständig? Bestimmen Sie die äquivalenten Martingalmaße, falls sie existieren. Eindeutig? 5 Pkt

(h) Bewerten Sie die asiatische Kaufoption auf das Wertpapier S

$$C := \left(S_2 - \frac{1}{3} \sum_{t=0}^{2} S_t \right)^{+}.$$

10 Pkt

3. **Zwei-Perioden-Modell: Snell-Einhüllende, Optimale Stoppzeit, Amerikanische Option**

Betrachten Sie das folgende zweiperiodige Modell mit einer risikolosen und einer risikobehafteten Anlage S^0 und S. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ für $i = 1, ..., 4$.

$$\begin{tikzcd}
S_0^0 = 1 \arrow[r] & S_1^0 = 1 \arrow[r] & S_2^0 = 1 \\
 & & S_2(\omega_1) = 20 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 16 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 10 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 10 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 6 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 4
\end{tikzcd}$$

Betrachten Sie den Zahlungsanspruch C der amerikanischen Option, der gegeben ist durch $C_0 = 4$, $C_1(\omega_{1,2}) = 4$, $C_1(\omega_{3,4}) = 6$, $C_2(\omega_1) = 5$, $C_2(\omega_{2,3}) = 15$ und $C_2(\omega_4) = 0$.

(a) Bestimmen Sie das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}^*$. Identifizieren Sie dabei $\mathbb{P}^*$ mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$, wobei $p_i = \mathbb{P}^*[\{\omega_i\}]$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. 5 Pkt

(b) Theoriefrage zum Problem des optimalen Stopps:

- Formulieren Sie das Problem des optimalen Stopps mit einem adaptierten integrierbaren Prozess $\{H_t\}_{t=0,...,T}$. 2 Pkt
- Definieren Sie die Snell-Einhüllende für $\{H_t\}_{t=0,...,T}$. Welche Eigenschaft hat sie? 2 Pkt
- Was ist die Lösung (sind die Lösungen) des Problems des optimalen Stopps? Wie finden Sie die kleinste und die größte Lösung? 2 Pkt
- Was ist der Wert des Problems? 2 Pkt

(c) Amerikanische Option:

- Was ist eine amerikanische Option? Unterschied zu einer europäischen Option? 2 Pkt
- Bestimmen Sie die Preise der amerikanischen Option zur Zeit $t = 0, 1, 2$. 10 Pkt
- Berechnen Sie die minimale optimale Ausübungsstrategie $\tau_{\min}$, d.h. bestimmen Sie $\tau_{\min}(\omega_i)$, $i = 1, ..., 4$. 5 Pkt