

Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

**Finanzmathematik 1: diskrete Modelle**  
**(Vorlesungsprüfung)**  
**24. Juni 2019**

Dauer: 120 Minuten

Bei der schriftlichen Prüfung darf ein nicht programmierbarer Taschenrechner benutzt werden.

---

Bsp.	Max.	Punkte
1	40	
2	30	
3	30	
$\Sigma$	100	

**Note:**

1. **Ein-Perioden-Modell: Arbitragefreiheit, Vollständigkeit, Optionsbewertung, (Super/Sub)Hedgen**

Es seien  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  und  $\mathcal{P}(\Omega)$  die Potenzmenge von  $\Omega$ . Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  gelte  $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ . Das Preissystem zum Zeitpunkt  $t = 0$  sei durch  $\bar{\pi} = (\pi^0, \pi) = (1, 5)$  und zum Zeitpunkt  $t = 1$  durch  $\bar{S} = (S^0, S)$

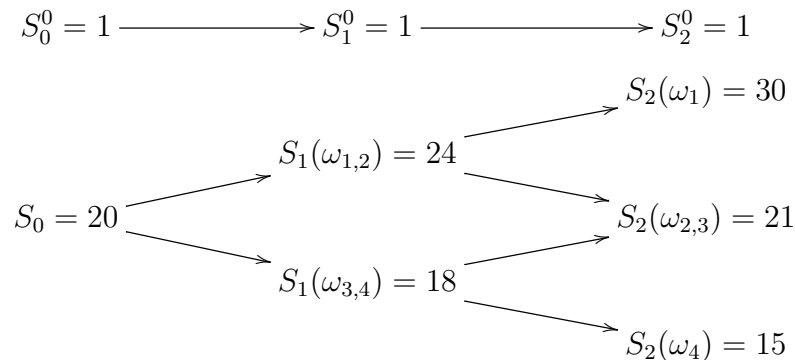
$$\bar{S}(\omega_1) = \left(\frac{10}{9}, \frac{20}{3}\right), \quad \bar{S}(\omega_2) = \left(\frac{10}{9}, \frac{40}{9}\right), \quad \bar{S}(\omega_3) = \left(\frac{10}{9}, \frac{10}{3}\right)$$

gegeben.

- (a) Was ist eine Arbitragemöglichkeit? Was ist ein äquivalentes Martingalmaß? 4 Pkt
- (b) Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße. 5 Pkt
- (c) Zeigen Sie, dass das Modell arbitragefrei ist. Mit welchem Satz zeigen Sie diese Aussage? Was besagt dieser Satz? 4 Pkt
- (d) Was bedeutet die Vollständigkeit? Ist das Marktmodell vollständig? Mit welchem Satz zeigen Sie Ihre Aussage? Was besagt dieser Satz? 6 Pkt
- (e) Was heißt erreichbar? Welche Zahlungsansprüche  $(C(\omega_1), C(\omega_2), C(\omega_3))$  sind erreichbar? 4 Pkt
- (f) Betrachten Sie den Zahlungsanspruch  $(C(\omega_1), C(\omega_2), C(\omega_3)) = (30, 20, 10)$ .
- Ist  $C$  erreichbar? 2 Pkt
  - Wie bestimmen Sie den Preis (die Preise) einer Zahlungsanspruch? 2 Pkt
  - Ist der arbitragefreie Preis von  $C$  eindeutig? Bestimmen Sie den eindeutigen arbitragefreien Preis  $\pi^c$ . Falls die Preise nicht eindeutig sind, bestimmen Sie die Schranken  $\pi_{\text{sup}}$  und  $\pi_{\text{inf}}$  der arbitragefreien Preise. 3 Pkt
  - Formulieren Sie den Super/Subhedgensatz. Bedeutung (es reicht, nur den Teil fürs Superhedgen zu antworten)? 2 Pkt
  - Finden Sie ein replizierendes Portfolio  $\bar{\xi}$  mit  $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} = \pi^c$  falls der Preis eindeutig ist. Andernfalls bestimmen Sie ein Subhedgenportfolio  $\bar{\xi}$  mit  $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} = \pi_{\text{inf}}$  und ein Superhedgenportfolio  $\bar{\zeta}$  mit  $\bar{\zeta} \cdot \bar{\pi} = \pi_{\text{sup}}$ . 8 Pkt

## 2. Zwei-Perioden-Modell: Arbitragefreiheit, Vollständigkeit, Optionsbewertung, Hedgenstrategie

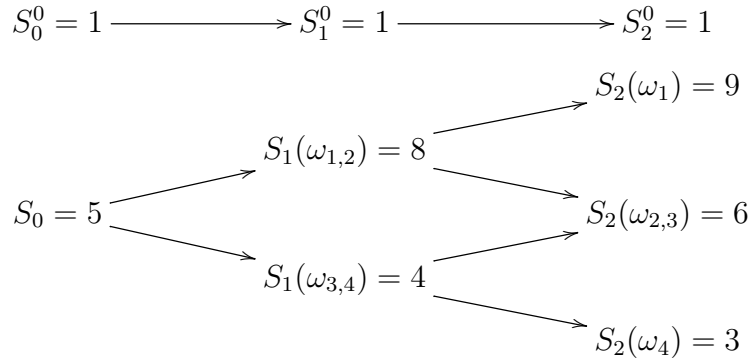
Betrachten Sie das folgende Zwei-Perioden-Modell mit einer risikolosen Anlage  $S^0$  und einer risikobehafteten Anlage  $S$ . Desweiteren sei  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ,  $P(\omega_i) > 0$  für  $i \in \{1, \dots, 4\}$ .



- Schreiben Sie die von  $S$  erzeugte Filtrierung explizit hin. 2 Pkt
- Welche Messbarkeit brauchen wir für die Handelsstrategie  $\bar{\xi} = (\xi^0, \xi)$ ? Definition? 3 Pkt
- Was ist eine selbstfinanzierende Handelsstrategie? 2 Pkt
- Was ist eine Arbitragemöglichkeit hier? 2 Pkt
- Formulieren Sie “Lokalisierung der Arbitrage” und den ersten Hauptsatz (auch die notwendige Definition, z.B., äquivalentes Martingalmaß). 2 Pkt
- Was ist ein arbitragefreier Preis einer Zahlungsanspruch? Wie bewerten wir einen Zahlungsanspruch? 4 Pkt
- Ist das Model arbitragefrei, vollständig? Berechnen Sie die äquivalenten Martingalmaße, falls sie existieren. Eindeutig? 5 Pkt
- Betrachten Sie die europäische Call-Option mit  $K = 18$ . Bestimmen Sie den arbitragefreien Preis und die replizierende Strategie. 10 Pkt

### 3. Zwei-Perioden-Modell: Snell-Einhüllende, Optimale Stoppzeit, Amerikanische Option

Betrachten Sie das folgende zweiperiodige Modell mit einer risikolosen und einer risikobehafteten Anlage  $S^0$  und  $S$ . Sei  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ,  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$ ,  $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathfrak{P}(\Omega)$  und  $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$  für  $i = 1, \dots, 4$ .



Betrachten Sie den Zahlungsanspruch  $C$  der amerikanischen Option, der gegeben ist durch  $C_0 = 1$ ,  $C_1(\omega_{1,2}) = 4$ ,  $C_1(\omega_{3,4}) = 0$ ,  $C_2(\omega_1) = 4$ ,  $C_2(\omega_{2,3}) = 1$  und  $C_2(\omega_4) = 0$ .

- (a) Berechnen Sie das äquivalente Martingalmaß  $\mathbb{P}^*$ . 5 Pkt
- (b) Theoriefrage zum Problem des optimalen Stopps:
- Formulieren Sie das Problem des optimalen Stopps mit einem adaptierten integrierbaren Prozess  $\{H_t\}_{t=0, \dots, T}$ . 2 Pkt
  - Definieren Sie die Snell-Einhüllende für  $\{H_t\}_{t=0, \dots, T}$ . Welche Eigenschaft hat sie? 2 Pkt
  - Was ist die Lösung (sind die Lösungen) des Problems des optimalen Stopps? Wie finden Sie die kleinste und die größte Lösung? 2 Pkt
  - Was ist der Wert des Problems? 2 Pkt
- (c) Amerikanische Option:
- Was ist eine amerikanische Option? Unterschied zu einer europäischen Option? 2 Pkt
  - Bestimmen Sie die Preise der amerikanischen Option zur Zeit  $t = 0, 1, 2$ . 10 Pkt
  - Berechnen Sie die minimale optimale Ausübungsstrategie  $\tau_{\min}$ , d.h. bestimmen Sie  $\tau_{\min}(\omega_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . 5 Pkt