Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle
(Vorlesungsprüfung)
25. Februar 2019

Dauer: 90 Minuten

Bei der schriftlichen Prüfung darf ein nicht programmierbarer Taschenrechner und ein von Hand (beidseitig) beschriebener A4-Zettel benutzt werden.

Anmeldung zur mündlichen Prüfung per Mail (junjian.yang@tuwien.ac.at)

Bsp.	Max.	Punkte
1	40	
2	15	
3	15	
4	30	
$\sum$	100	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. **Ein-Perioden-Modell: Arbitragefreiheit, Vollständigkeit, Optionsbewertung, (Super/Sub)Hedgen**

   Es seien $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ gelte $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$. Das Preissystem zum Zeitpunkt $t = 0$ sei durch $\overline{\pi} = (\pi^0, \pi) = (1, 5)$ und zum Zeitpunkt $t = 1$ durch $\overline{S} = (S^0, S)$

   $$\overline{S}(\omega_1) = \left(\frac{10}{9}, \frac{20}{3}\right), \qquad \overline{S}(\omega_2) = \left(\frac{10}{9}, \frac{40}{9}\right), \qquad \overline{S}(\omega_3) = \left(\frac{10}{9}, \frac{10}{3}\right)$$

   gegeben.

   (a) Was ist eine Arbitragemöglichkeit? Was ist ein äquivalentes Martingalmaß? 4 Pkt

   (b) Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße. 5 Pkt

   (c) Zeigen Sie, dass das Modell arbitragefrei ist. Mit welchem Satz zeigen Sie diese Aussage? Was besagt dieser Satz? 4 Pkt

   (d) Was bedeutet die Vollständigkeit? Ist das Marktmodell vollständig? Mit welchem Satz zeigen Sie Ihre Aussage? Was besagt dieser Satz? 6 Pkt

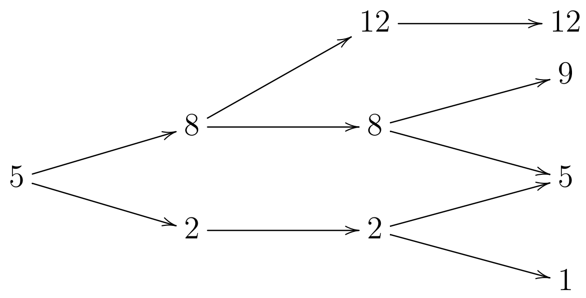
   (e) Was heißt erreichbar? Welche Zahlungsansprüche $\big(C(\omega_1), C(\omega_2), C(\omega_3)\big)$ sind erreichbar? 4 Pkt

   (f) Betrachten Sie den Zahlungsanspruch $\big(C(\omega_1), C(\omega_2), C(\omega_3)\big) = (30, 20, 10)$.

   - Ist C erreichbar? 2 Pkt
   - Ist der arbitragefreie Preis von C eindeutig? Bestimmen Sie den eindeutigen arbitragefreien Preis π^c. Falls die Preise nicht eindeutig sind, bestimmen Sie die Schranken π_{sup} und π_{inf} der arbitragefreien Preise. 5 Pkt
   - Finden Sie ein replizierendes Portfolio $\overline{\xi}$ mit $\overline{\xi} \cdot \overline{\pi} = \pi^c$ falls der Preis eindeutig ist. Andernfalls bestimmen Sie ein Subhedgenportfolio $\overline{\xi}$ mit $\overline{\xi} \cdot \overline{\pi} = \pi_{\text{inf}}$ und ein Superhedgenportfolio $\overline{\zeta}$ mit $\overline{\zeta} \cdot \overline{\pi} = \pi_{\text{sup}}$. 10 Pkt

2. **Mehrperiodiges Modell: Arbitragefreiheit**

Gegeben sei ein dreiperiodiges Modell mit Investitionsmöglichkeiten in eine risikolose Anlage und in eine risikobehaftete Anlage. Der diskontierte Preis der risikobehafteten Anlage S kann sich folgendermaßen entwickeln:



Jeder Pfad hat Wahrscheinlichkeit größer null.

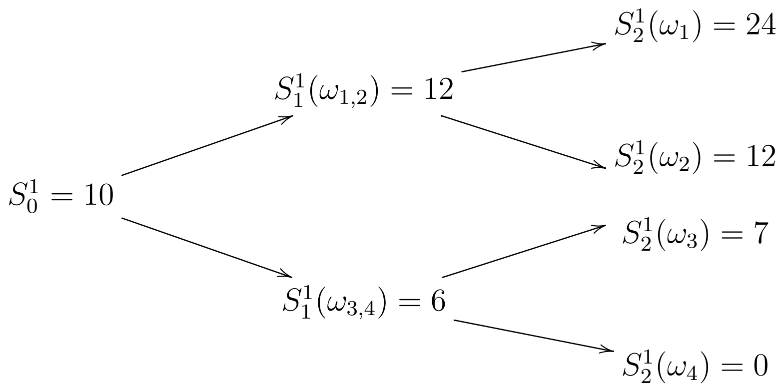
(a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an und schreiben Sie die von S erzeugte Filtrierung explizit hin. 5 Pkt

(b) Geben Sie eine Arbitragemöglichkeit an und zeigen Sie, dass diese die Voraussetzungen einer Arbitragemöglichkeit erfüllt. 5 Pkt

(c) Geben Sie zwei verschiedene Möglichkeiten an, das Modell arbitragefrei zu machen. 5 Pkt

3. **Zwei-Perioden-Modell: Arbitragefreiheit, Optionsbewertung**

Gegeben sei ein zweiperiodiges Modell mit einer risikolosen Anlage mit $r = 0,1$ und einer risikobehafteten Anlage S mit der folgenden Kursenentwicklung



(a) Ist dieser Markt arbitragefrei? Ist er vollständig? 5 Pkt

(b) Bewerten Sie den Zahlungsanspruch

$$H := \max\{S_0, S_1, S_2\} - \min\{S_0, S_1, S_2\}.$$

10 Pkt

4. **Zwei-Perioden-Modell: Snell-Einhüllende, Optimale Stoppzeit**

Betrachten Sie ein zweiperiodiges Binomialmodell mit $r = 1/4$, $u = 1,3$, $d = 1,1$ und Startpreis $S_0 = 100$. Sei $\Omega = \{uu, ud, du, dd\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(\omega) > 0$ für jedes ω. Betrachten Sie die amerikanische Option C.

$$
\begin{tikzcd}
 & & C_2(uu) = 100 \\
 & C_1(uu, ud) = 90 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & C_2(ud) = 20 \\
C_0 = 20 \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \\
 & & C_2(du) = 60 \\
 & C_2(du, dd) = 40 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & C_2(dd) = 30
\end{tikzcd}
$$

(a) Berechnen Sie das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}^*$. 5 Pkt

(b) Berechnen Sie den diskontierten Preisprozess der Option. 15 Pkt

(c) Berechnen Sie die optimale Stoppzeit $\tau_{\min}$. 5 Pkt

(d) Bestimmen Sie die Anfangsposition (ξ_1^0, ξ_1^1) einer Hedgen-Strategie für die amerikanische Option. 5 Pkt