Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle
(Vorlesungsprüfung)
24. September 2018

Dauer: 90 Minuten

Bei der schriftlichen Prüfung darf ein nicht programmierbarer Taschenrechner und ein von Hand (beidseitig) beschriebener A4-Zettel benutzt werden.

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im Sekretariat,
Sandra Trenovatz (sandra@fam.tuwien.ac.at).

Bsp.	Max.	Punkte
1	40	
2	30	
3	30	
$\sum$	100	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. **Ein-Perioden-Modell: Arbitragefreiheit, Vollständigkeit, Optionsbewertung, (Super/Sub)Hedgen**

   Es seien $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ gelte $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$. Das Preissystem zum Zeitpunkt $t = 0$ sei durch $\overline{\pi} = (\pi^0, \pi) = (1, 5)$ und zum Zeitpunkt $t = 1$ durch $\overline{S} = (S^0, S)$

$$\overline{S}(\omega_1) = \left(\frac{10}{9}, \frac{20}{3}\right), \qquad \overline{S}(\omega_2) = \left(\frac{10}{9}, \frac{40}{9}\right), \qquad \overline{S}(\omega_3) = \left(\frac{10}{9}, \frac{10}{3}\right)$$

   gegeben.

   (a) Was ist eine Arbitragemöglichkeit? Was ist ein äquivalentes Martingalmaß? 4 Pkt

   (b) Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße. 5 Pkt

   (c) Zeigen Sie, dass das Modell arbitragefrei ist. Mit welchem Satz zeigen Sie diese Aussage? Was besagt dieser Satz? 4 Pkt

   (d) Was bedeutet die Vollständigkeit? Ist das Marktmodell vollständig? Mit welchem Satz zeigen Sie Ihre Aussage? Was besagt dieser Satz? 6 Pkt

   (e) Was heißt erreichbar? Welche Zahlungsansprüche $\big(C(\omega_1), C(\omega_2), C(\omega_3)\big)$ sind erreichbar? 4 Pkt

   (f) Betrachten Sie den Zahlungsanspruch $\big(C(\omega_1), C(\omega_2), C(\omega_3)\big) = (30, 20, 10)$.

   - Ist C erreichbar? 2 Pkt
   - Ist der arbitragefreie Preis von C eindeutig? Bestimmen Sie den eindeutigen arbitragefreien Preis π^c. Falls die Preise nicht eindeutig sind, bestimmen Sie die Schranken π_{sup} und π_{inf} der arbitragefreien Preise. 5 Pkt
   - Finden Sie ein replizierendes Portfolio $\overline{\xi}$ mit $\overline{\xi} \cdot \overline{\pi} = \pi^c$ falls der Preis eindeutig ist. Andernfalls bestimmen Sie ein Subhedgenportfolio $\overline{\xi}$ mit $\overline{\xi} \cdot \overline{\pi} = \pi_{\text{inf}}$ und ein Superhedgenportfolio $\overline{\zeta}$ mit $\overline{\zeta} \cdot \overline{\pi} = \pi_{\text{sup}}$. 10 Pkt

2. **Zwei-Perioden-Modell: Arbitragefreiheit, Optionsbewertung**

Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einer risikolosen und einer risikobehafteten Anlage S^0 bzw. S. Desweiteren sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, $\mathcal{F}_0$ trivial, $\mathcal{F}_l = \sigma(S_k^1 : k \leq l)$ für $l \in \{1, 2\}$ und $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, \dots, 5\}$.

$$
\begin{tikzcd}
S_0^0 = 1 \arrow[r] & S_1^0 = \frac{5}{4} \arrow[r] & S_2^0 = \frac{6}{4} \\
 & & S_2^1(\omega_1) = 72 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 45 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 24 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & S_1(\omega_3) = 30 \arrow[r] & S_2(\omega_{2,3,4}) = x \\
 & S_1(\omega_{4,5}) = 25 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_5) = 12
\end{tikzcd}
$$

(a) Bestimmen Sie alle $x > 0$, für die das Modell arbitragefrei ist. 5 Pkt

(b) Berechnen Sie die Menge aller äquivalenten Martingalmaße. 5 Pkt

(c) Berechnen Sie die Menge aller arbitragefreien Preise für einen Claim mit $C(\omega_{1,5}) = 12$ und $C(\omega_{2,3,4}) = 0$. 20 Pkt

3. **Zwei-Perioden-Modell: Snell-Einhüllende, Optimale Stoppzeit**

In einem Binomialmodell mit $u = 2, d = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{3}, S_0 = 1$ und $T = 3$ betrachten Sie eine amerikanische Put-Option mit $T = 3$ und $K = \frac{1}{2}$.

(a) Berechnen Sie das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}^*$. 5 Pkt

(b) Berechnen Sie den Preisprozess der Option. 20 Pkt

(c) Berechnen die minimale optimale Stoppzeit $\tau_{\min}$, d.h. bestimmen Sie $\tau_{\min}(\omega_i)$, $i = 1, ..., 4$. 5 Pkt

Hinweis: Fertigen Sie eine Skizze des Modells an.