

Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

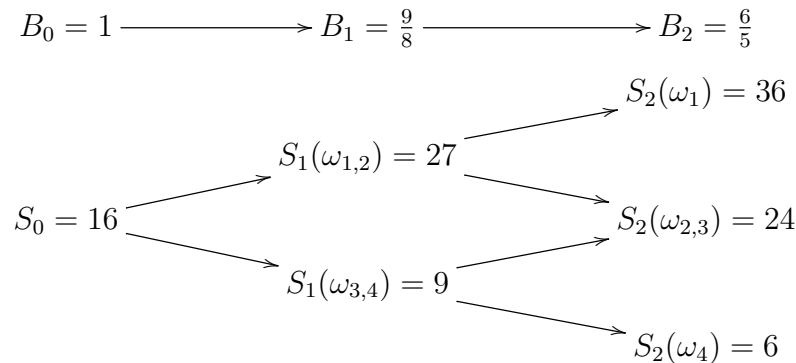
Finanzmathematik 1: diskrete Modelle
(Vorlesungsprüfung)
26. Februar 2018
Stefan Gerhold

(Dauer 90 Minuten, Erlaubte Hilfsmittel: Schreibutensilien, nicht programmierbarer Taschenrechner, 1 selbstbeschriebenes A4 Blatt (beidseitig))

Anmeldung zur mündlichen Prüfung nach Absprache.

Bsp.	Max.	Punkte
1	10	
2	5	
3	3	
Σ	18	

1. Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen Finanzgut B und einer Aktie S , auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,2}$ wird von S erzeugt, d.h., $\mathcal{F}_t = \sigma(S_0, \dots, S_t)$ für $t = 0, 1, 2$.



- (i) Finden Sie alle äquivalenten Martingalmaß \mathbb{P}^* . (Identifizieren Sie \mathbb{P}^* mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$; erklären Sie, was diese Identifikation bedeutet.) (2 pts.)
- (ii) Es bezeichne $X_t = S_t/B_t$ den diskontierten Preisprozess. Wir betrachten einen diskontierten amerikanischen claim H , definiert durch (3 pts.)

$$\begin{aligned}
 H_2 &= (25 - X_2)^+, \\
 H_1 &= (X_1 - 10)^+, \\
 H_0 &= 13.
 \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Snell-Einhüllende dieses claims (bzgl. \mathbb{P}^*).

- (iii) Berechnen Sie die Stoppzeit τ_{\min} . (2 pts.)
- (iv) Wie ist der gestoppte Prozess $U^{\tau_{\min}}$ definiert? Geben Sie ihn explizit an. Ist $U^{\tau_{\min}}$ ein Martingal? Falls ja, zeigen Sie die Martingaleigenschaft durch Berechnung der bedingten Erwartungswerte. (3 pts.)

2. Wir betrachten ein arbitragefreies, vollständiges Mehrperiodenmodell

$$(\bar{S}_t)_{t=0, \dots, T} = (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)_{t=0, \dots, T},$$

wobei S^0 positiv ist. Die diskontierten Preisprozesse sind $X^i = S^i/S^0$. Definiere für $K > 0$ den diskontierten claim

$$H = \left(\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T X_k^1 - K \right)^+$$

(asiatischer Typ, d.h. underlying ist ein über mehrere Zeitpunkte gemittelter Kurs).

- (i) Benutzen Sie die Jensensche Ungleichung, um eine untere Abschätzung für den Preis von H zu erhalten. (3 pts.)
- (ii) Berechnen Sie den Preis dieses europäischen claims im Modell aus Beispiel 1, als explizite Funktion von K . (2 pts.)

3. Zur Erinnerung: Ein Einperioden-Modell heißt *nicht redundant*, falls für alle Portfolios $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ (3 pts.)

$$\bar{\xi}\bar{S} = 0 \text{ f.s.} \implies \bar{\xi} = 0$$

gilt. Geben Sie ein beliebiges Beispiel für ein *redundantes* Einperioden-Modell an (komplette Definition, also W -Raum, Anfangspreisvektor $\bar{\pi}$, Preisvektor \bar{S}).