Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle
(Vorlesungsprüfung)
24. November 2017
Stefan Gerhold

(Dauer 90 Minuten, Erlaubte Hilfsmittel: Schreibutensilien, nicht programmierbarer Taschenrechner, 1 selbstbeschriebenes A4 Blatt (beidseitig))

Anmeldung zur mündlichen Prüfung nach Absprache.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	6	
3	3	
$\sum$	14	

1. Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen Finanzgut S^0 und einem riskanten Finanzgut S auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dabei sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,2}$ die von S erzeugte Filtration, $r \geq 0$ und $\mathbb{P}[\{\omega_i\}] > 0$ für $i = 1, ..., 4$.

$$
\begin{tikzcd}
S_0^0 = 1 \arrow[r] & S_1^0 = 1 + r \arrow[r] & S_2^0 = (1+r)^2 \\
 & & S_2(\omega_1) = 144 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 108 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 90 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 96 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 72 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 48
\end{tikzcd}
$$

(i) Geben Sie die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,2}$ explizit an. (1 Pkt.)

(ii) Bestimmen Sie die Zinssätze $r \geq 0$, für die das Modell arbitragefrei ist. (2 Pkt.)

(iii) Es sei $r = 0$. Berechnen Sie eine replizierende Handelsstrategie des Claims $C_2(\omega_1) = 114$, $C_2(\omega_{2,3}) = 90$, $C_2(\omega_4) = 78$. Bestimmen Sie den arbitragefreien Preis des Claims. (2 Pkt.)

2. Betrachten Sie das folgende Einperioden-Modell: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, Zinsrate $r = 1/2$, Dimension $d = 2$,

$$S_0 = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_1) = \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_2) = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_3) = \begin{pmatrix} 18 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Es ist ein W-Maß gegeben, das auf jedem Szenario positive Masse hat.

(i) Berechnen Sie die Menge der äquivalenten Martingalmaße. Ist das Modell arbitragefrei/vollständig? (2 Pkt.)

(ii) Berechnen Sie die Menge der arbitragefreien Preise des Claims (1 Pkt.)

$$C = (S_1^2 - S_1^1 - 1)^+.$$

(iii) Berechnen Sie die Menge (1 Pkt.)

$$\{p \geq 0 : \text{Es gibt einen Superhedge für } C \text{ mit Preis } p\}.$$

(iv) Finden Sie ein Portfolio $\bar{\xi} = (\xi^0, \xi^1, \xi^2)$ mit $\bar{\xi}\bar{S} > C$ (strikte Ungleichung!). Was ist der Preis Ihres Portfolios? (2 Pkt.)

3. Wir betrachten ein arbitragefreies (nicht notwendigerweise vollständiges) Mehrperiodenmodell

$$(\bar{S}_t)_{t=0,\dots,T} = (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)_{t=0,\dots,T},$$

wobei S^0 positiv und deterministisch ist. Für reelle Gewichte $\lambda_i \geq 0$ definieren wir den Claim (Fälligkeit T)

$$C = \Big| \sum_{i=1}^{d} \lambda_i S_T^i - K \Big|.$$

Finden Sie eine untere Abschätzung für die arbitragefreien Preise von C (analog zur Abschätzung eines Callpreises durch den inneren Wert). (3 Pkt.)