Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

# Finanzmathematik 1: diskrete Modelle
# (Vorlesungsprüfung)
# 13. Oktober 2017
# Stefan Gerhold

(Dauer 90 Minuten, Erlaubte Hilfsmittel: Schreibutensilien, nicht programmierbarer Taschenrechner, 1 selbstbeschriebenes A4 Blatt (beidseitig))

Anmeldung zur mündlichen Prüfung nach Absprache.

| Bsp. | Max. | Punkte |
|---|---|---|
| 1 | 8 | |
| 2 | 3 | |
| 3 | 7 | |
| $\sum$ | 18 | |

1. Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen Finanzgut $S^0$ und einem riskanten Finanzgut $S$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dabei sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1), \mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2)$ und $\mathbb{P}[\{\omega_i\}] > 0$ für $i = 1, ..., 4$.

$$\begin{tikzcd}
S_0^0 = 1 \arrow[r] & S_1^0 = \frac{4}{3} \arrow[r] & S_2^0 = \frac{5}{3} \\
 & & S_2(\omega_1) = 240 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 160 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 100 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 120 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 80 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 80
\end{tikzcd}$$

(i) Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße $\mathbb{P}^*$. (2 Pkt.)
(Identifizieren Sie dabei $\mathbb{P}^*$ mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$, wobei $p_i = \mathbb{P}^*[\{\omega_i\}]$, $i = 1, 2, 3, 4$.)

(ii) Betrachten Sie eine europäische Put-Option mit Strikepreis $K = 100$. Ist die Put-Option replizierbar? Falls ja, berechnen Sie eine selbstfinanzierende replizierende Strategie $(\bar{\xi}_t)_{t=1,2}$. (3 Pkt.)

(iii) Berechnen Sie den Preisprozess einer amerikanischen Put-Option mit Strikepreis $K = 100$. Bestimmen Sie außerdem die optimale Stoppzeit $\tau_{\min}$. (3 Pkt.)

2. Betrachten sie das folgende Einperioden-Modell.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, Zinsrate $r = 1/2$, Dimension $d = 3$, (3 pts.)

$$S_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_1) = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_2) = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_3) = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Es ist ein W-Maß gegeben, das auf jedem Szenario positive Masse hat. Berechnen Sie die Menge der äquivalenten Martingalmaße. Ist das Modell arbitragefrei/vollständig?

3. Gegeben sei ein Binomialmodell mit $T = 20$ Perioden. Der Preisprozess der Aktie ist $(S_t)_{t=0,...,20}$ mit $S_0 = 1$. Die returns für einen Aufwärts- bzw. Abwärtsschritt sind

$$b = 1/10 \quad \text{und} \quad a = -1/11.$$

Es gilt also

$$S_{t+1} \in \{\hat{a}S_t, \hat{b}S_t\}, \quad t = 0, \dots, 19,$$

mit $\hat{a} = 1+a = 10/11$ und $\hat{b} = 1+b = 11/10$. Der Zins ist in jeder Periode $r = 1/20$.

(i) Berechnen Sie die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit (2 Pkt.)

$$p^* = \mathbb{P}\Big[\frac{S_t - S_{t-1}}{S_t} = b\Big], \quad t = 1, \dots, 20,$$

für einen Aufwärtsschritt. Geben Sie die Herleitung der dazu benötigten Formel an.

(ii) Eine Call-Option mit strike $K = 4$ und Fälligkeit $T = 20$ hat die Auszahlung $C := (S_T - K)^+$. Welche Werte kann $C$ annehmen? (1 Pkt.)

(iii) Geben Sie die risikoneutrale Verteilung von $C$ an. (1 Pkt.)

(iv) Es bezeichne (3 Pkt.)

$$V_t = \mathbb{E}^*[H|\mathcal{F}_t], \quad t = 0, \dots, 20,$$

den diskontierten Wertprozess der Option, wobei $H = C/(1+r)^{20}$. Dann ist $V_t$ eine Funktion von $S_t$, in der Vorlesung mit $V_t = v_t(S_t)$ bezeichnet. Finden Sie die Funktion $v_{10}$, d.h., stellen Sie sie als Summe dar.

Hinweise:

- In (iii) und (iv) können Binomialkoeffizienten und $r, a, b, \hat{a}, \hat{b}, p^*$ as Symbole stehenbleiben und müssen nicht numerisch berechnet bzw. eingesetzt werden.
- Allgemein wurde für einen diskontierten claim $H = h(S_0, \dots, S_T)$ in der Vorlesung gezeigt, dass

  $$V_t = v_t(S_0, \dots, S_t)$$

  mit

  $$v_t(x_0, \dots, x_t) = \mathbb{E}^*\Big[h\Big(x_0, \dots, x_t, x_t\frac{S_1}{S_0}, \dots, x_t\frac{S_{T-t}}{S_0}\Big)\Big].$$