Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle (Vorlesungsprüfung) 26. Juni 2017 Stefan Gerhold

(Dauer 90 Minuten, Erlaubte Hilfsmittel: Schreibutensilien, nicht programmierbarer Taschenrechner, 1 selbstbeschriebenes A4 Blatt (beidseitig))

Anmeldung zur mündlichen Prüfung nach Absprache.

Bsp.	Max.	Punkte
1	9	
2	5	
3	3	
$\sum$	17	

1. Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen Finanzgut B und einer Aktie S, auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,2}$ wird von S erzeugt, d.h., $\mathcal{F}_t = \sigma(S_0, \ldots, S_t)$ für $t = 0, 1, 2$.

$$\begin{tikzcd}
B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = \frac{9}{8} \arrow[r] & B_2 = \frac{6}{5} \\
 & & S_2(\omega_1) = 36 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 27 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 16 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 24 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 9 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 6
\end{tikzcd}$$

(i) Finden sie alle äquivalenten Martingalmaße $\mathbb{P}^*$. (Identifizieren Sie $\mathbb{P}^*$ mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$; erklären Sie, was diese Identifikation bedeutet.) (2 pts.)

(ii) Es bezeichne $X_t = S_t / B_t$ den diskontierten Preisprozess. Wir betrachten einen diskontierten amerikanischen claim H, definiert durch (3 pts.)

$$\begin{aligned}
H_2 &= (25 - X_2)^+ \\
H_1 &= (X_1 - 10)^+ \\
H_0 &= 13.
\end{aligned}$$

Berechnen Sie den arbitragefreien Preis dieser Option.

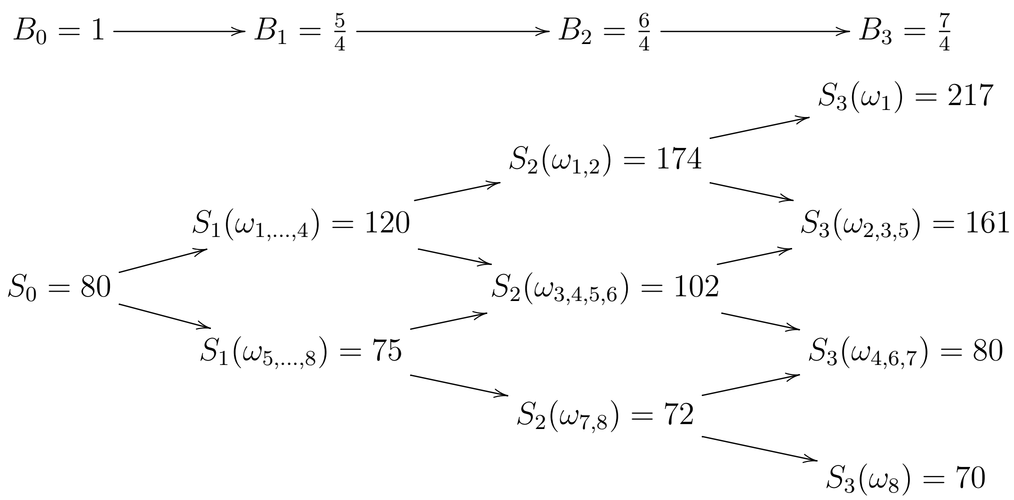
(iii) Berechnen Sie die Stoppzeit $\tau_{\min}$. (2 pts.)

(iv) Wir definieren (2 pts.)

$$\hat{\tau}(\omega) := \begin{cases} 1 & \omega \in \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\} \\ 2 & \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Berechnen Sie $\mathbb{E}^*[H_{\hat{\tau}}]$. Ist $\hat{\tau}$ eine optimale Stoppzeit?

2. Betrachten Sie das folgende Dreiperioden-Modell mit riskantem asset S und risikolosem asset B. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_8\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2)$, $\mathcal{F}_3 = \sigma(S_1, S_2, S_3)$ und $P[\{\omega_i\}] > 0$ für $i = 1, ..., 8$.



(i) Zeigen Sie, dass dieses Modell Arbitrage erlaubt. (2 pts.)

(ii) Geben Sie eine Arbitragestrategie $(\bar{\xi}_t)_{t=1,2,3}$ an. Zeigen Sie, dass Ihre Strategie selbstfinanzierend ist, und dass sie eine Arbitragemöglichkeit ist. (3 pts.)

Hinweise:

- Wenn Sie Teil (ii) gelöst haben, ist natürlich auch (i) gelöst. Trotzdem ist es empfehlenswert, vorher (i) zu betrachten. Konzentrieren Sie sich dazu auf die dritte Periode.
- Falls Sie (ii) nicht lösen, ist für (i) eine präzise Begründung nötig.

3. Betrachten sie das folgende Einperioden-Modell.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, Zinsrate $r = 1/10$, Dimension $d = 2$, (3 pts.)

$$S_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_1) = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Es ist ein W-Maß gegeben, das auf jedem Szenario positive Masse hat. Berechnen Sie die Menge der äquivalenten Martingalmaße. Ist das Modell arbitragefrei/vollständig?