Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle
(Vorlesungsprüfung)
27. Februar 2017
Stefan Gerhold

(Dauer 90 Minuten, Erlaubte Hilfsmittel: Schreibutensilien, nicht programmierbarer Taschenrechner, 1 selbstbeschriebenes A4 Blatt (beidseitig))

Anmeldung zur mündlichen Prüfung nach Absprache.

Bsp.	Max.	Punkte
1	9	
2	8	
3	3	
$\sum$	20	

1. Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen Finanzgut B und einer Aktie S, auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,2}$ wird von S erzeugt, d.h., $\mathcal{F}_t = \sigma(S_0, \dots, S_t)$ für $t = 0, 1, 2$.

$$\begin{tikzcd} B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = \frac{9}{8} \arrow[r] & B_2 = \frac{7}{6} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & S_2(\omega_1) = 35 \\ & S_1(\omega_{1,2}) = 27 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ S_0 = 16 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 21 \\ & S_1(\omega_{3,4}) = 9 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & S_2(\omega_4) = 7 \end{tikzcd}$$

   (i) Finden sie alle äquivalenten Martingalmaße $\mathbb{P}^*$. (Identifizieren Sie $\mathbb{P}^*$ mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$; erklären Sie, was diese Identifikation bedeutet.) (2 pts.)

   (ii) Wir betrachten eine Europäische Put-Option mit Fälligkeit 2 und Strike 28. Bestimmen Sie den diskontierten Preisprozess $(V_t)_{t=0,1,2}$. (3 pts.)

   (iii) Finden Sie eine Replikationsstrategie $(\overline{\xi}_t)_{t=1,2}$ für die Option. Achten Sie auf klare Notation und definieren Sie sämtliche Bezeichnungen, die Sie verwenden und die keine Standardnotation aus der Vorlesung sind. Es muss klar hervorgehen, wie der Prozess $(\overline{\xi}_t)_{t=1,2}$ definiert ist. (3 pts.)

   (iv) Erklären Sie allgemein, was eine Europäische Put-Option ist (*nicht*, was die Auszahlungsfunktion ist). (1 pts.)

2. Wir betrachten das Modell aus dem vorigen Beispiel und eine amerikanische Option mit *diskontiertem* Auszahlungsprozess $(H_t)_{t=0,1,2}$, wobei

$$H_t = \tfrac{1}{2} X_t, \quad t = 0, 1,$$
$$H_2 = (24 - X_2)^+.$$

   (X ist der diskontierte Aktienpreis.)

   (i) Berechnen Sie die Snell-Einhüllende der Option. (3 pts.)

   (ii) Berechnen Sie die Stoppzeit $\tau_{\max}$. (2 pts.)

   (iii) Berechnen Sie $\mathbb{E}^*[H_{\tau_{\max}}]$. Welcher Wert ergibt sich und warum? (1 pts.)

   (iv) Berechnen Sie die σ-Algebra $\mathcal{F}_\tau$ für $\tau = \tau_{\max}$. (2 pts.)

3. Betrachten sie das folgende Einperioden-Modell.
   $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $r = 0$, Dimension $d = 2$, (3 pts.)

$$S_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_1) = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

   Es ist ein W-Maß gegeben, das auf jedem Szenario positive Masse hat. Berechnen Sie die Menge der äquivalenten Martingalmaße. Ist das Modell arbitragefrei/vollständig?