Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle
(Vorlesungsprüfung)
25. November 2016
Stefan Gerhold

(Dauer 90 Minuten, Erlaubte Hilfsmittel: Schreibutensilien, nicht programmierbarer Taschenrechner, 1 selbstbeschriebenes A4 Blatt (beidseitig))

Anmeldung zur mündlichen Prüfung nach Absprache.

Bsp.	Max.	Punkte
1	8	
2	7	
3	5	
$\sum$	20	

1. Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen Finanzgut B und einer Aktie S, auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,2}$ wird von S erzeugt, d.h., $\mathcal{F}_t = \sigma(S_0, \dots, S_t)$ für $t = 0, 1, 2$.

$$\begin{tikzcd}
B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = 1 \arrow[r] & B_2 = 1 \\
 & & S_2(\omega_1) = 30 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 20 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 10 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 18 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 8 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 6
\end{tikzcd}$$

   (i) Finden sie die Menge $\mathcal{P}$ der äquivalenten Martingalmaße. (Identifizieren Sie äquivalente Martingalmaße $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$; erklären Sie, was diese Identifikation bedeutet.) (2 pts.)

   (ii) Wir nehmen jetzt S als numéraire, betrachten also (2 pts.)

$$\overline{Y}_t := (Y_t^0, Y_t^1) := \left(\frac{B_t}{S_t}, 1\right), \quad t = 0, 1, 2.$$

   Finden sie die Menge $\tilde{\mathcal{P}}$ der äquivalenten Martingalmaße bezüglich des numéraires S (d.h. $\overline{Y}$ muss ein Martingal sein).

   (iii) Berechnen Sie für jedes $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ und jedes $\tilde{\mathbb{P}}^* \in \tilde{\mathcal{P}}$ die Dichte $d\tilde{\mathbb{P}}^*/d\mathbb{P}^*$. (2 pts.)

   (iv) Statt des konkreten Modells oben sei ein *beliebiges* arbitragefreies Modell $(B_t, S_t)_{t=0,1,2}$ gegeben. Kann es dann sein, dass $\tilde{\mathcal{P}}$ leer ist? Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\mathcal{P}$ und $\tilde{\mathcal{P}}$? (2 pts.)

2. Wir betrachten das Modell aus dem vorigen Beispiel und die pfadabhängige europäische Option mit Fälligkeit $T = 2$ und Auszahlung

$$H = (S_2 - 8)^+ \vee \max_{0 \le u < 2} S_u.$$

   (i) Berechnen Sie die Menge der arbitragefreien Preise der Option. (1 pts.)

   (ii) Finden Sie eine Replikationsstrategie $(\overline{\xi}_t)_{t=1,2}$ für die Option. Achten Sie auf klare Notation und definieren Sie sämtliche Bezeichnungen, die Sie verwenden und die keine Standardnotation aus der Vorlesung sind. Es muss klar hervorgehen, wie der Prozess $(\overline{\xi}_t)_{t=1,2}$ definiert ist. (4 pts.)

   (iii) Betrachte die zugehörige *amerikanische* Option mit Auszahlung (2 pts.)

$$H_t = (S_t - 8)^+ \vee \max_{0 \le u < t} S_u, \quad t = 0, 1, 2.$$

   Wie ist allgemein Replizierbarkeit amerikanischer Optionen definiert? Ist diese amerikanische Option im gegebenen Modell replizierbar?

3. Betrachten sie folgende Einperioden-Modelle.

(A) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $r = \frac{1}{3}$,

$$S_0 = 4, \quad S_1(\omega_1) = \frac{28}{3}, \quad S_1(\omega_2) = 8, \quad S_1(\omega_3) = 4.$$

(B) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $r = 0$, Dimension $d = 2$,

$$S_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_1) = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Für jedes Modell ist ein W-Maß gegeben, das auf jedem Szenario positive Masse hat.

(i) Berechnen Sie für beide Modelle die Menge der äquivalenten Martingalmaße. (3 pts.)

(ii) Finden Sie für jedes Modell, das Arbitrage erlaubt, ein Arbitrage-Portfolio $\overline{\xi} = (\xi^0, \dots, \xi^d)$. (Hinweis: Versuchen Sie $\xi^1 = 0$.) (2 pts.)