

Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

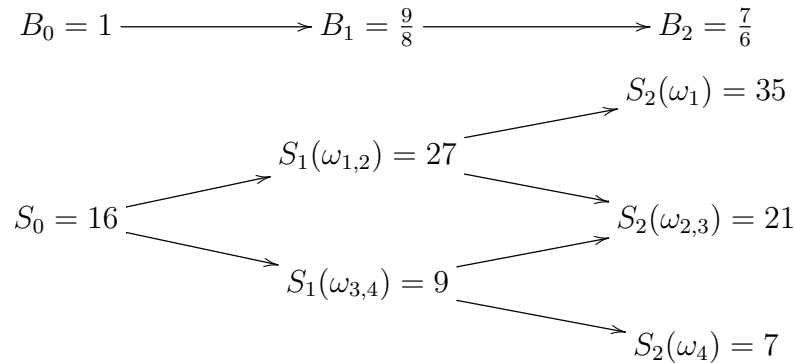
Finanzmathematik 1: diskrete Modelle
(Vorlesungsprüfung)
14. Oktober 2016
Stefan Gerhold

(Dauer 90 Minuten, Erlaubte Hilfsmittel: Schreibutensilien, nicht programmierbarer Taschenrechner, 1 selbstbeschriebenes A4 Blatt (beidseitig))

Anmeldung zur mündlichen Prüfung nach Absprache.

Bsp.	Max.	Punkte
1	13	
2	10	
3	4	
Σ	27	

1. Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen Finanzgut B und einer Aktie S , auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,2}$ wird von S erzeugt, d.h., $\mathcal{F}_t = \sigma(S_0, \dots, S_t)$ für $t = 0, 1, 2$.



- (i) Definieren Sie explizit $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,2}$, den Prozess S und (eine sinnvolle Wahl des Maßes) \mathbb{P} in mathematischer Standardnotation. (Z.B.: $S_1(\omega_{1,2})$ im obigen Diagramm ist *nicht* Standardnotation, außerdem ist die Filtration *explizit* anzugeben.) (2 pts.)
- (ii) Finden sie alle äquivalenten Martingalmaße \mathbb{P}^* . (Identifizieren Sie \mathbb{P}^* mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$; erklären Sie, was diese Identifikation bedeutet.) (2 pts.)
- (iii) Wir betrachten folgende Europäische Barriere-Option mit Fälligkeit 2: Einen down-and-out call mit strike 14 und knock-out level (=Barriere) 15. Bestimmen Sie den diskontierten Preisprozess $(V_t)_{t=0,1,2}$. (4 pts.)
- (iv) Es bezeichne P_1 die Verteilung der Zufallsvariablen V_1 bezüglich \mathbb{P}^* . Dann ist P_1 eine Abbildung von wo wohin, und wie ist sie definiert? (1 pts.)
- (v) Finden Sie eine Replikationsstrategie $(\bar{\xi}_t)_{t=1,2}$ für die Barriere-Option. Achten Sie auf klare Notation und definieren Sie sämtliche Bezeichnungen, die Sie verwenden und die keine Standardnotation aus der Vorlesung sind. Es muss klar hervorgehen, wie der Prozess $(\bar{\xi}_t)_{t=1,2}$ definiert ist. (4 pts.)
2. Es sei $X = S/B$ der diskontierte Preisprozess aus dem vorigen Beispiel. Wir betrachten eine Amerikanische Option mit diskontierter Auszahlung $H_t = (12 - X_t)^+$, $t = 0, 1, 2$.
- (i) Berechnen Sie die Snell-Einhüllende $(U_t)_{t=0,1,2}$ von H bzgl. \mathbb{P}^* . Welche Bedeutung hat U_0 ? (4 pts.)
- (ii) Geben Sie die Definition der Stoppzeiten τ_{\min} und τ_{\max} und berechnen Sie sie. (4 pts.)
- (iii) Betrachten Sie den zu H gehörigen Europäischen claim. Hat er denselben arbitragefreien Preis wie der Amerikanische claim? (Begründung!) Hinweis: Für diese Frage sind keinerlei Berechnungen nötig. (2 pts.)

3. Betrachten Sie das folgende zwei-dimensionale Einperiodenmodell: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$,
Zins $r = 0$,

$$S_0 = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_1) = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \frac{1}{3}.$$

- (i) Berechnen Sie die Menge der Martingalmaße und die Menge der äquivalenten Martingalmaße. Ist das Modell arbitragefrei? (4 pts.)