Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle (Vorlesungsprüfung) 14. Oktober 2016 Stefan Gerhold

(Dauer 90 Minuten, Erlaubte Hilfsmittel: Schreibutensilien, nicht programmierbarer Taschenrechner, 1 selbstbeschriebenes A4 Blatt (beidseitig))

Anmeldung zur mündlichen Prüfung nach Absprache.

Bsp.	Max.	Punkte
1	13	
2	10	
3	4	
$\sum$	27	

1. Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen Finanzgut B und einer Aktie S, auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,2}$ wird von S erzeugt, d.h., $\mathcal{F}_t = \sigma(S_0, \ldots, S_t)$ für $t = 0, 1, 2$.

$$\begin{tikzcd}
B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = \frac{9}{8} \arrow[r] & B_2 = \frac{7}{6}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = 35 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 27 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 16 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 21 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 9 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 7
\end{tikzcd}$$

(i) Definieren Sie explizit $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,2}$, den Prozess S und (eine sinnvolle Wahl des Maßes) $\mathbb{P}$ in mathematischer Standardnotation. (Z.B.: $S_1(\omega_{1,2})$ im obigen Diagramm ist *nicht* Standardnotation, außerdem ist die Filtration *explizit* anzugeben.) (2 pts.)

(ii) Finden sie alle äquivalenten Martingalmaße $\mathbb{P}^*$. (Identifizieren Sie $\mathbb{P}^*$ mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$; erklären Sie, was diese Identifikation bedeutet.) (2 pts.)

(iii) Wir betrachten folgende Europäische Barriere-Option mit Fälligkeit 2: Einen down-and-out call mit strike 14 und knock-out level (=Barriere) 15. Bestimmen Sie den diskontierten Preisprozess $(V_t)_{t=0,1,2}$. (4 pts.)

(iv) Es bezeichne P_1 die Verteilung der Zufallsvariablen V_1 bezüglich $\mathbb{P}^*$. Dann ist P_1 eine Abbildung von wo wohin, und wie ist sie definiert? (1 pts.)

(v) Finden Sie eine Replikationsstrategie $(\bar{\xi}_t)_{t=1,2}$ für die Barriere-Option. Achten Sie auf klare Notation und definieren Sie sämtliche Bezeichnungen, die Sie verwenden und die keine Standardnotation aus der Vorlesung sind. Es muss klar hervorgehen, wie der Prozess $(\bar{\xi}_t)_{t=1,2}$ definiert ist. (4 pts.)

2. Es sei $X = S/B$ der diskontierte Preisprozess aus dem vorigen Beispiel. Wir betrachten eine Amerikanische Option mit diskontierter Auszahlung $H_t = (12 - X_t)^+$, $t = 0, 1, 2$.

(i) Berechnen Sie die Snell-Einhüllende $(U_t)_{t=0,1,2}$ von H bzgl. $\mathbb{P}^*$. Welche Bedeutung hat U_0? (4 pts.)

(ii) Geben Sie die Definition der Stoppzeiten $\tau_{\min}$ und $\tau_{\max}$ und berechnen Sie sie. (4 pts.)

(iii) Betrachten Sie den zu H gehörigen Europäischen claim. Hat er denselben arbitragefreien Preis wie der Amerikanische claim? (Begründung!) Hinweis: Für diese Frage sind keinerlei Berechnungen nötig. (2 pts.)

3. Betrachten Sie das folgende zwei-dimensionale Einperiodenmodell: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, Zins $r = 0$,

$$S_0 = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_1) = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \frac{1}{3}$.

(i) Berechnen Sie die Menge der Martingalmaße und die Menge der äquivalenten Martingalmaße. Ist das Modell arbitragefrei? (4 pts.)