Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: Diskrete Modelle
(Vorlesungsprüfung II)
9. Oktober 2015
Paul Krühner

(Dauer 90 Minuten, Erlaubte Hilfsmittel: Schreibutensilien, nicht programierbarer Taschenrechner, 1 selbstbeschriebenes A4 Blatt (beidseitig))

Anmeldung zur mündlichen Prüfung nach Absprache

Bsp.	Max.	Punkte
1	4	
2	6	
3	8	
4	2	
$\sum$	20	

Für die gesamte Klausur sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

1. Eine amerikanische Rederei verkauft ein Schiff für €100.000.000 welches in 2 Jahren geliefert und bezahlt werden soll. Die Rederei wendet sich an eine europäische Bank und fragt an, ob sie \$100.000.000 jetzt für die €100.000.000 in zwei Jahren bekommen kann.

   Die Bank kann sowohl in europäische als auch in amerikanische Staatsanleihen investieren, welche jeweils 1,1% Zinsen für zwei Jahre geben. Außerdem kann die Bank sowohl in Europa (in €) als auch in Amerika (in \$) einen Kredit aufnehmen, welcher unabhängig von der Laufzeit 1% Zinsen im Jahr kostet. Der tägliche Dollarpreis in Euro sei durch

$$\$_n := \$_0 \exp\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)$$

   beschrieben für $n = 0, \ldots, 730$ wobei $\$_0 := 0{,}91$ und $X_1, \ldots, X_{730}$ unabhängig identisch $N(\mu, \sigma^2)$ verteilt seien mit $\sigma^2 = \frac{0.06}{365}$ und $\mu = 0$. Die Bank geht zudem davon aus, dass die Rederei die \$100.000.000 in zwei Jahren bezahlen kann.

   Sollte die Bank das Angebot annehmen? Begründen Sie Ihre Antwort in dem Sie angeben was die Bank machen muss, welche Position daraus für die Bank nach zwei Jahren resultiert und wie diese Position zu bewerten ist. (4 Pkt.)

2. Sei (S_0, S_1, S_2) ein Binomialmodell mit $N = 2$ Handelsperioden, Parametern $u = 0{,}26$, $d = -0{,}055$, $r = 0{,}05$ und $S_0^1 = 100$.

   (i) Zeichnen Sie einen geeigneten Binomialgraphen oder Binomialbaum. (2 Pkt.)

   (ii) Bestimmen Sie den Preis einer amerikanischen Put-Option auf das riskante Wertpapier mit Basispreis von 105,84 und letztem Ausübungszeitpunkt bei $n = 2$. (2 Pkt.)

   (iii) Finden Sie eine billigste Superhedgingstrategie für die amerikanische Put-Option. (2 Pkt.)

   Hinweis: Es ist $\hat{u} := \frac{u-r}{1+r} = 0{,}2$ und $\hat{d} := \frac{d-r}{1+r} = -0{,}1$ als auch $96 \cdot (1{,}05)^2 = 105{,}84$ und $96 \cdot 1{,}05 = 100{,}80$.

3. Betrachten Sie das folgende 1-Perioden-Modell (S_0, S_1) mit einem risikolosen Wertpapier $B = S^0 = (1,1)$ und zwei riskanten Finanzgütern S^1, S^2. Dabei sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1) = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{3}$ für $i = 1, ..., 3$ und die Preisentwicklung durch den folgenden Graph beschrieben.

$$B_0 = 1 \longrightarrow B_1 = 1$$

$$S_0^1 = 100 \longrightarrow \begin{cases} S_1^1(\omega_1) = 120 \\ S_1^1(\omega_2) = 100 \\ S_1^1(\omega_3) = 80 \end{cases}$$

$$S_0^2 = 100 \longrightarrow \begin{cases} S_1^2(\omega_1) = 60 \\ S_1^2(\omega_2) = 120 \\ S_1^2(\omega_3) = 120 \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie alle zu P äquivalenten Martingalmaße Q oder finden Sie eine Arbitrage. (2 Pkt.)

(ii) Ist der Markt arbitragefrei? Ist der Markt vollständig? (2 Pkt.)

(iii) Betrachten Sie eine europäische Call-Option C mit Basispreis $K = 95$ auf das *erste* Wertpapier S^1 welche am Ende der Handelsperiode fällig wird. Ist diese Option duplizierbar? (2 Pkt.)

(iv) Finden Sie den varianzoptimalen Hedge für C bezüglich P. Was ist der Anfangspreis für den varianzoptimalen Hedge? (2 Pkt.)

4. Es sei $(S_0, \ldots, S_N)$ ein abitragefreies und vollständiges N-Perioden-Modell. Zeigen Sie ohne Benutzung der Fundamentalsätze, dass höchstens ein Martingalmaß existiert. (2 Pkt.)