Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: Diskrete Modelle (Vorlesungsprüfung) 29. Juni 2015 Paul Krühner

(Dauer 90 Minuten, Erlaubte Hilfsmittel: Schreibutensilien, nicht programierbarer Taschenrechner, 1 selbstbeschriebenes A4 Blatt (beidseitig))

Anmeldung zur mündlichen Prüfung nach Absprache

Bsp.	Max.	Punkte
1	4	
2	8	
3	2	
4	6	
$\sum$	20	

Für die gesamte Klausur sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

1. Sei $(S_0, \ldots, S_N)$ ein arbitragefreies Standardmodell mit $N = 5$ Handelsperioden, $S_n^0 = (1+r)^n$ für ein $r \geq 0$ und $n = 0, \ldots, N$ und $P = Q$ ein Martingalmaß. Weiter Sei $F_0, \ldots, F_N$ ein mit Arbitragefreiheit verträglicher Preis für einen Forward auf S^1 mit Fälligkeit N und Forwardpreis $K = 100$.

   (i) Beschreiben Sie in Worten was ein Forward Geschäft ist. (2 Pkt.)

   (ii) Finden Sie eine Superhedingstrategie für den Forward. (2 Pkt.)

2. Für diese Aufgabe sei $\Omega = \{\omega_{++}, \omega_{+-}, \omega_{-+}, \omega_{--}\}$ eine vierelementige Menge. Zudem sei $A_+ := \{\omega_{++}, \omega_{+-}\}$, $A_- := A_+^c = \{\omega_{-+}, \omega_{--}\}$, $\mathcal{F}_1 := \{\emptyset, A_+, A_-, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_2 := \mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω. Weiter gelte $P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$ für alle $\omega \in \Omega$ und (S_0, S_1, S_2) sei ein 2-Perioden-Modell mit einem risikolosem Wertpapier $S_n^0 = 1$ für $n = 0, \ldots, 2$ und einem riskantem Wertpapier S^1 mit

$$S_0^1 = 100,$$
$$S_1^1 = \begin{cases} 110 & \text{auf } A_+, \\ 90 & \text{auf } A_-, \end{cases}$$
$$S_2^1 = \begin{cases} 120 & \text{auf } \{\omega_{++}\}, \\ 100 & \text{auf } \{\omega_{+-}\}, \\ 120 & \text{auf } \{\omega_{-+}\}, \\ 80 & \text{auf } \{\omega_{--}\}. \end{cases}$$

   (i) Zeichnen Sie zunächst einen Binomialbaum oder rekombinierenden Binomialgraph. (2 Pkt.)

   (ii) Bestimmen Sie ein Martingalmaß oder eine Arbitrage. (2 Pkt.)

   (iii) Zeigen Sie, dass der Markt vollständig ist. (2 Pkt.)

   (iv) Bestimmen Sie den Anfangspreis einer amerikanischen Call-Option auf S^1 mit Basispreis 100 und Verfallsdatum 2. (2 Pkt.)

3. Es sei $(S_0, \ldots, S_N)$ ein N-Perioden-Modell und $Q \approx P$ ein Martingalmaß. Zeigen Sie ohne Benutzung der Fundamentalsätze, dass keine beschränkte Arbitrage existiert, d.h. Sie müssen zeigen, dass für jede beschränkte selbstfinanzierende Handelsstrategie φ mit $V_0(\varphi) \leq 0$ und $V_N(\varphi) \geq 0$ bereits $V_N(\varphi) = 0$ P-f.s. gilt. (2 Pkt.)

4. Betrachten Sie das folgende 1-Perioden-Modell (S_0, S_1) mit einem risikolosen $B := S^0$ und einem riskanten Finanzgut S^1. Dabei sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$ und $P(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, ..., 3$ und die Preisentwicklung durch den folgenden Baum beschrieben.

$$B_0 = 1 \longrightarrow B_1 = \tfrac{5}{4}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & S_1^1(\omega_1) = 150 \\
S_0^1 = 100 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & S_1^1(\omega_2) = 125 \\
 & S_1^1(\omega_3) = 100
\end{tikzcd}$$

(i) Bestimmen Sie alle zu P äquivalenten Martingalmaße Q. (2 Pkt.)

(ii) Ist der Markt arbitragefrei? Ist der Markt vollständig? (2 Pkt.)

(iii) Betrachten Sie eine europäische Put-Option mit Basispreis $K = 125$. Ist die Option duplizierbar? (2 Pkt.)