Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle
(Vorlesungsprüfung)
30. Juni 2014
Christa Cuchiero

90 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: ein handbeschriebener DIN-A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Informationen zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	12	
2	12	
3	12	
$\sum$	36	

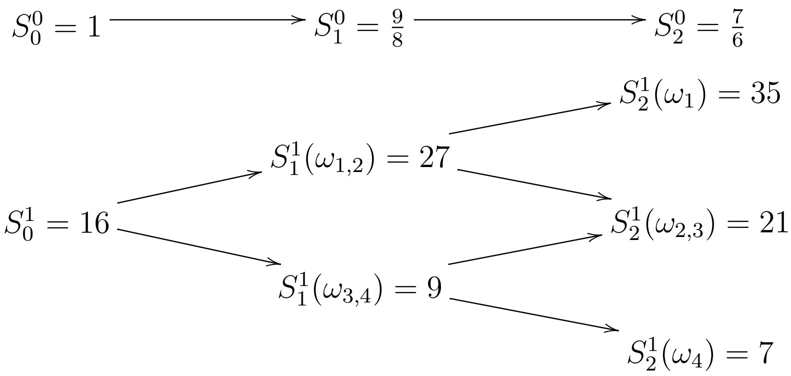
Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen Finanzgut (12 Pkt.) S^0 und einem riskanten Finanzgut S^1 auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dabei sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\{\omega_i\}) > 0$ für $i \in \{1, \ldots, 4\}$. Außerdem sei die Filtration im Finanzmarktmodell durch $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1^1)$ und $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1^1, S_2^1)$ gegeben.



(i) Definieren Sie Arbitragefreiheit in diesem Finanzmarktmodell und formulieren Sie das "Fundamental Theorem of Asset Pricing" um den Zusammenhang zu Martingalmaßen zu erläutern.

(ii) Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße P^* im obigen Finanzmarktmodell. Identifizieren sie dabei P^* mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$, wobei $p_i = P^*(\{\omega_i\})$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(iii) Betrachten Sie eine asiatische Kaufoption auf das Wertpapier S^1 und bewerten Sie diese indem Sie einen (nicht diskontierten) Preisprozess $(C_t)_{t\in\{0,1,2\}}$ angegeben, sodass das erweiterte Finanzmarktmodell arbitragefrei ist. Diese Option ist eine Kaufoption europäischen Typs deren Ausübungspreis dem mittleren Preis des Wertpapiers über die betrachteten Perioden entspricht. Das heißt, der Payoff C_2 is gegeben durch

$$C_2 = \left(S_2^1 - \frac{1}{3} \sum_{t=0}^{2} S_t^1 \right)^+ .$$

2. Betrachten Sie folgendes Einperiodenmodell (S^0, S^1) auf einem Wahrscheinlichkeits- (12 Pkt.) raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dabei sei das risikolose Wertpapier durch $S_0^0 = S_0^1 = 1$ und das risikante Wertpapier durch $S_0^1 = 1$ und

$$S_1^1 = e^Z, \quad \text{mit} \quad Z \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{und} \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

gegeben.

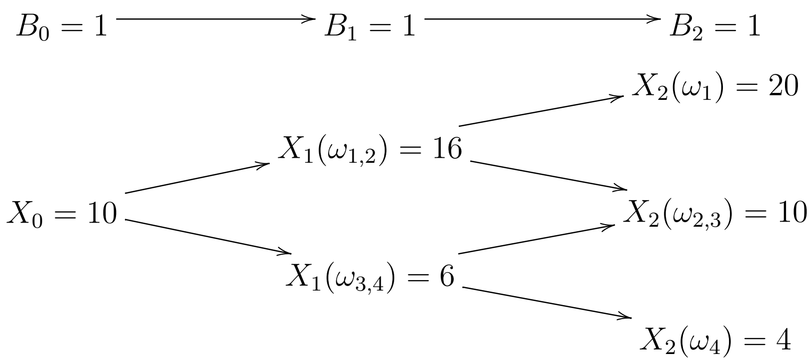
(i) Definieren Sie zuerst ein riskoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß. Für welche Parameter μ und σ Ist P risikoneutral? (Hinweis: Die momenterzeugende Funktion M der $N(0, 1)$-Verteilung ist durch $M(t) = \exp(t^2/2)$ gegeben.)

(ii) Von nun an sei $Z \sim N(0,1)$ unter P. Für $\nu > 0$ finden Sie ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß P^*_ν, sodass $Z \sim N(-\nu^2/2, \nu^2)$ unter P^*_ν gilt. (Hinweis: Versuchen Sie den Ansatz $dP^*_\nu/dP = f_\nu(Z)$)

(iii) Sind die Maße P^*_ν risikoneutral?

(iv) Definieren Sie die Vollständigkeit eines Finanzmarktmodells. Formulieren Sie einen aus der Vorlesung bekannten Satz, der die Vollständigkeit und Arbitragefreiheit eines Finanzmarktmodells mittels risikoneutralen Maßen charakterisiert. Ist das hier betrachtete Einperiodenmodell arbitragefrei? Ist es auch vollständig?

3. Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen Finanzgut B und einem riskanten Finanzgut X. Desweiteren sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(X_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(X_1, X_2) = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1,2,3,4\}$. (12 Pkt.)



(i) Bestimmen Sie das äquivalente Martingalmaß P^*. Identifizieren sie dabei P^* mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$, wobei $p_i = P^*(\{\omega_i\})$ für $i \in \{1,2,3,4\}$.

(ii) Geben Sie zunächst allgemein die Definition der Snell-Einhüllenden eines nichtnegativen adaptierten Prozesses $(H_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ mit $T \in \mathbb{N}$ an. Berechnen sie diese weiters unter dem Martingalmaß P^* im obigen Finanzmarktmodell für den Claim $(H_t)_{t\in\{0,\dots,2\}}$ definiert durch

$$\begin{aligned} H_0 &= 4 \\ H_1(\omega_{1,2}) &= 4 \\ H_1(\omega_{3,4}) &= 6 \\ H_2(\omega_1) &= 5 \\ H_2(\omega_{2,3}) &= 15 \\ H_2(\omega_4) &= 0. \end{aligned}$$

(iii) Definiere die minimale optimale Stoppzeit $\tau_{\min}$ und berechne diese für den gegebenen Claim H im obigen Finanzmarktmodell.

(iv) Zeigen Sie, dass im obigen Finanzmarktmodell aufgrund von $B_0 = B_1 = B_2$ der Preisprozess einer amerikanischen Put-Option mit jenem einer europäischen Put-Option übereinstimmt.