Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle (Vorlesungsprüfung) 7. Oktober 2013

Dauer: 90 Minuten

Bei der schriftlichen Prüfung darf ein nicht programmierbarer Taschenrechner und ein von Hand (beidseitig) beschriebener A4-Zettel benutzt werden.

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im Sekretariat,
Sandra Trenovatz (sandra@fam.tuwien.ac.at).

Bsp.	Max.	Punkte
1	25	
2	35	
3	40	
$\sum$	100	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. **Zwei-Perioden-Modell: Hedgingstrategie**
   Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Desweiteren sei $r \geq 0$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, ..., 4\}$.

$$B_0 = 1 \longrightarrow B_1 = (1+r) \longrightarrow B_2 = (1+r)^2$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & S_2(\omega_1) = 30 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 24 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 20 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 21 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 18 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 15
\end{tikzcd}$$

   1) Definieren Sie, was ein arbitragefreies Modell ist und bestimmen Sie die Zinssätze r, für die das obige Modell arbitragefrei ist. 5 Pkt
   2) Es sei $r = 0$. Zeigen Sie, dass das Modell vollständig ist und berechnen Sie die replizierende Handelsstrategie für eine Call-Option mit Strike $K = 18$. Bestimmen Sie den fairen Preis dieser Call-Option. 20 Pkt

2. **Zwei-Perioden-Modell: Snell-Einhüllende**
Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Desweiteren sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, ..., 4\}$.

$$\begin{tikzcd}
B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = \frac{3}{2} \arrow[r] & B_2 = 2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = 48 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 24 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 10 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 16 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 9 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 4
\end{tikzcd}$$

1) Bestimmen Sie das äquivalente Martingalmaß. 5 Pkt
2) Geben Sie zunächst die Definition der Snell'schen Einhüllenden an. Berechnen Sie anschließend die Snell-Einhüllende des Claims $C_0 = 0$, $C_1(\omega_{1,2}) = 21$, $C_1(\omega_{3,4}) = 18$, $C_2(\omega_1) = 32$, $C_2(\omega_2) = C_2(\omega_3) = 28$ und $C_2(\omega_4) = 8$. 20 Pkt
3) Berechnen Sie die minimale optimale Stoppzeit τ_{min}. 10 Pkt

3. **Entropie**

$\mathcal{M}$ sei die Menge aller Wmaße auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1) Geben Sie die Definition der *relativen Entropie* $H(Q, P)$ des Wahrscheinlichkeitsmasses Q bezüglich P an. 5 Pkt

2) Beweisen Sie: 15 Pkt

$$H(Q, P) \geq 0. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass Gleichheit in (1) genau dann gilt, wenn $P = Q$ erfüllt ist.

3) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei nun ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ für alle $\omega \in \Omega$. Für $Q \in \mathcal{M}$ heißt 20 Pkt

$$H(Q) := -\sum_{\omega \in \Omega} Q(\{\omega\}) \log Q(\{\omega\}) \tag{2}$$

Entropie von Q, wobei $0 \log 0 := 0$ gilt. Zeigen Sie:

$$\max_{Q \in \mathcal{M}} H(Q) = H(P). \tag{3}$$

`Hinweis zu Teilaufgabe 3): Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen` $H(Q)$ `und` $H(Q, P)$ `und verwenden Sie anschließend Teilaufgabe 2).`