Name:

Mat.Nr.:

Kennz.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle
(Vorlesungsprüfung)
29. Juni 2012
Stefan Gerhold

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt)

Anmeldung zur mündlichen Prüfung via TISS möglich.
Wenn zu wenig Prüfungstermine online sind, bitte
den Vortragenden Stefan Gerhold kontaktieren.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	4	
$\sum$	14	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, 2, 3$. Betrachten Sie ein Einperiodenmodell auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einem risikolosen Finanzgut $\pi^0 = 1$, $S^0 = 1$ und einem risikobehafteten Finanzgut $\pi^1 = 50$, $S^1(\omega_1) = 10$, $S^1(\omega_2) = 60$ und $S^1(\omega_3) = 70$.

   (i) Berechnen Sie alle äquivalenten Martingalmaße $\mathbb{P}^*$. (Identifizieren Sie dabei $\mathbb{P}^*$ mit $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$, wobei $p_i = \mathbb{P}^*(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, 3$.) (1 Pkt.)

   (ii) Prüfen Sie, ob das Modell arbitragefrei und/oder vollständig ist (mit genauer Begründung). (1 Pkt.)

   (iii) Betrachten Sie in diesem Modell einen Claim mit $C(\omega_1) = 120$, $C(\omega_2) = C(\omega_3) = 0$. Ist dieser Claim replizierbar? Bestimmen Sie die Menge aller arbitragefreien Preise von C. (1 Pkt.)

   (iv) Das Modell wird mit einem weiteren risikobehafteten Finanzgut $\pi^2 = 16$, $S^2(\omega_1) = 32$, $S^2(\omega_2) = 8$ und $S^2(\omega_3) = 16$ erweitert. Bestimmen Sie alle Martingalmaße $\mathbb{P}^*$ für das erweiterte Modell. (1 Pkt.)

   (v) Berechnen Sie die Menge aller arbitragefreien Preise für den Claim C aus (iii). (1 Pkt.)

2. Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dabei sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1), \mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2)$ und $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, ..., 4$.

$$B_0 = 1 \longrightarrow B_1 = \tfrac{4}{3} \longrightarrow B_2 = \tfrac{5}{3}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = 240 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 160 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 100 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 120 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 80 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 80
\end{tikzcd}$$

   (i) Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße $\mathbb{P}^*$. (Identifizieren Sie dabei $\mathbb{P}^*$ mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$, wobei $p_i = \mathbb{P}^*(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, 3, 4$.) (1 Pkt.)

   (ii) Betrachten Sie eine europäische Put-Option mit Strikepreis $K = 100$. Ist die Put- ~~Call~~-Option replizierbar? Falls ja, berechnen Sie eine selbstfinanzierende replizierende Strategie $(\overline{\xi_0}, \overline{\xi_1})$. (2 Pkt.)

   (iii) Berechnen Sie den Preisprozess einer amerikanischen Put-Option mit Strikepreis $K = 100$. Bestimmen Sie außerdem die optimale Stoppzeit $\tau_{\min}$. (2 Pkt.)

3. Gegeben sei ein Binomialmodell mit $r = 0.05, u = 1.1, d = 0.9, S_0 = 800$ und $B_0 = 1$. Im i-ten Zeitschritt gilt daher

$$B_i \longrightarrow B_{i+1} = (1+r)B_i = (1+r)^{i+1}$$

$$\begin{tikzcd} & S_{i+1} = uS_i \\ S_i \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "1-q"'] & \\ & S_{i+1} = dS_i \end{tikzcd}$$

Betrachten Sie eine (europäische) Call-Option mit Strikepreis $K = 500$ und Fälligkeit $T = 10$. Sei Z die Anzahl der „guten Tage“ (Aufwärtsschritte von S) bis T. Dann gilt $S_T(\omega) = S_0 u^{Z(\omega)} d^{T-Z(\omega)}$, $\omega \in \Omega$.

(i) Für welche Werte von Z wird der Call ausgeübt? (1 Pkt.)

(ii) Berechnen Sie für einen Zeitschritt die risikoneutrale (bedingte) Wahrscheinlichkeit q für einen Aufwärtsschritt. (1 Pkt.)

(iii) Berechnen Sie den arbitragefreien Preis der Call-Option zur Zeit $t = 0$. (2 Pkt.)