Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.695 Einführung in die Stochastischen Prozesse und Zeitreihen
2022S, VO, 2.5h, 4.0EC
27.September 2022
Hubalek/Scherrer

90 Minuten

Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner sind erlaubt

---

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. Sei (ϵ_t) ein white noise Prozess mit Varianz σ^2. Sind die folgenden Prozesse (x_t) stationär? Begründen Sie Ihre Antwort! Berechnen Sie auch immer (wenn möglich) die Erwartungswerte $\mathrm{E}\, x_t$ und die Kovarianzen $\mathrm{Cov}(x_t, x_s)$ für $t, s \in \mathbb{Z}$.

   (a) $(x_t = \epsilon_{-t})$

   (b) $(x_t = \epsilon_t + \epsilon_{-t})$

   (c) $(x_t = \frac{1}{5}(\epsilon_{t-2} + \epsilon_{t-1} + \epsilon_t + \epsilon_{t+1} + \epsilon_{t+2}))$

   (d) $(x_t = (1 + \epsilon_t)^2)$ Hinweis: hier genügt es zu argumentieren, wieso dieser Prozess im allgemeinen *nicht* schwach stationär ist.

   (e) $(x_t = (1 + t)^2 + \epsilon_t)$

2. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Es sei $T > 0$ eine feste Zahl. Weiters sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(f(t), t \geq 0)$ ein stochastischer Prozess mit $f(t) = e^{\alpha t}, \quad t \geq 0$. Für welche α gilt $f \in M^2$? Für welche gilt $f \in M_T^2$? (Genaue Begründung!)

   (b) (Fortsetzung) Berechen Sie den Erwartungswert und die **Standardabweichung** von

   $$I_T(f) = \int_0^T f(t)dW(t)$$

   für $\alpha = \ln 2$ und $T = \sqrt{13}$ mit einer Methode Ihrer Wahl. Runden Sie Ihre Ergebnisse zur nächstgelegenen ganzen Zahl!

   (c) Gegeben sei die Funktion $g(t,x) = t^3 e^{-x}$ und der Prozess $Y(t) = g(t, W(t))$. Wenden Sie die Ito-Formel an um eine Darstellung von $(Y(t), t \geq 0)$ als Ito-Prozess zu finden. Geben Sie das Ergebnis in Differentialschreibweise an.[1]

   (d) Gegeben sei die Funktion $h(t,x) = x^3 e^{-t}$ und der Prozess $(V(t), t \geq 0)$ mit

   $$V(t) = v + \kappa \int_0^t (\theta - V(s))ds + \xi \int_0^t \sqrt{V(s)} dW(s),$$

   wobei $v > 0, \kappa > 0, \theta > 0, 0 < \xi < \sqrt{2\kappa\theta}$ Parameter sind.[2] Sei $S(t) = h(t, V(t)$ für $t \geq 0$. Wenden Sie die Ito-Formel an um eine Darstellung von $(S(t), t \geq 0)$ als Ito-Prozess zu finden. Geben Sie das Ergebnis in Integralschreibweise an.[3]

   (e) Zeigen Sie sorgfältig und genau: Es gilt

   $$\lim_{n \to \infty} \int_0^n e^{-t} dW(t) = \int_0^\infty e^{-t} dW(t)$$

   in L^2.

---

[1] Integraldarstellung ergibt Punkteabzug!

[2] Das ist der Fellerscher Wurzelprozess, der im Zinsmodell von Cox, Ingersoll und Ross (CIR) verwendet wird. Die 'Feller condition' $\xi^2 < 2\kappa\theta$ garantiert, dass $V(t) > 0$ f.s. gilt.

[3] Differentialdarstellung ergibt Punkteabzug!

3. (a) Gegeben seien drei Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \in (0,1)$ und eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1,2\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (\gamma, 1-\gamma)$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

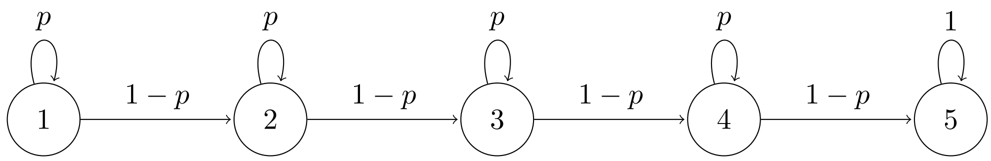
Berechnen Sie:

- $\mathbb{P}[X_4 = 2 | X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 2]$
- $\mathbb{P}[X_4 = 2, X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 2]$

(b) (Fortsetzung) Berechnen Sie:

- $\mathbb{P}[X_4 = 2, X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 1]$
- $\mathbb{P}[X_0 = 2 | X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 2, X_4 = 2]$

(c) Gegeben sei eine Zahl $p \in (0,1)$ und eine Markovkette $(Y_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1,2,3,4,5\}$, Anfangsverteilung δ_1 und folgendem Übergangsgraph:[4]



Sei $H = \inf\{n \geq 0 : Y_n = 5\}$. Berechnen Sie $E[H]$.

(d) Gegeben sei eine Markovkette $(R_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1, \ldots, 8\}$, Anfangsverteilung die diskrete Gleichverteilung auf I, und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.3 & 0.0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.2 & 0.0 & 0.3 \\ 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.2 & 0.0 & 0.3 \\ 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Kommunikationsklassen an.

Begründen Sie detailliert, dass die Zustände 2 und 8 kommunizieren, indem Sie entsprechende Verbindungen $i_1, \ldots, i_{n-1}$ mit $p_{2,i_1} \cdots p_{i_{n-1},8} > 0$ und umgekehrt angeben.

(e) Mit einem Satz aus der Vorlesung können wir rasch und ohne längere Rechnung begründen, dass die Kommunikationsklassen der Kette aus der vorigen Aufgabe alle rekurrent sind. Wie lautet dieser Satz, was sind genau die Voraussetzungen?

[4] Diese Aufgabe ist von der UNIQA 4WARD Math Challenge#2 inspiriert. Die Aufgabe dort ist allerdings etwas schwieriger. `https://fam.tuwien.ac.at/lehre/news/`

4. In dieser Aufgabe betrachten wir den AR(1) Prozess

$$x_t = -\frac{1}{2}x_{t-1} + \epsilon_t, \ \ (\epsilon_t) \sim \text{WN}(\sigma^2 = 1) \tag{1}$$

und den Prozess der "gleitenden Mittelwerte":

$$y_t = \frac{1}{2}(x_t + x_{t-1})$$

(a) Überprüfen Sie die Stabilitätsbedingung für das AR System (1).

(b) Zeigen Sie, dass die Autokovarianzfunktion von (x_t) gegeben ist durch:

$$\gamma_x(k) = \text{Cov}(x_{t+k}, x_t) = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{|k|}$$

(c) Zeigen Sie: Für die Autokovarianzfunktion des gemittelten Prozesses $\gamma_y(k) = \text{Cov}(y_{t+k}, y_t)$ gilt:

$$\gamma_y(0) = \frac{1}{3}$$
$$\gamma_y(1) = \frac{1}{12}$$

(d) Berechnen Sie die optimale (lineare) Prognose für y_{t+1}, gegeben x_t. Geben Sie auch die Varianz des entsprechenden Prognosefehlers an.

(e) Berechnen Sie die optimale (lineare) Prognose für y_{t+1}, gegeben y_t. Geben Sie auch hier die Varianz des entsprechenden Prognosefehlers an. Welche Prognose ((d) oder (e)) ist besser?