Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift oder Bleistift verwenden!

105.695 Einführung in die Stochastischen Prozesse und Zeitreihen
2022S, VO, 2.5h, 4.0EC
28.Juni 2022
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Bsp.	Max.	Punkte	Bemerkungen
1	5		
2	5		
3	5		
4	5		
$\sum$	20		

1. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$ gegeben. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von $(W(t), t \geq 0)$.

   (a) Zeigen Sie, dass der Prozess $(f(t), t \geq 0)$ mit

   $$f(t) = t + W(t), \quad t \geq 0$$

   für alle $T > 0$ in M_T^2 liegt und berechnen Sie die Norm des stochastischen Integrals $\|I_T(f)\|_{L^2}$ für alle $T > 0$.

   (b) Betrachten Sie den Prozess $(Z(t), t \geq 0)$ mit $Z(t) = f(t, W(t))$ für $t \geq 0$, wobei

   $$f(t, x) = \cos(t) + \sin(x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

   Wenden Sie die Ito-Formel an und geben Sie Ihr Ergebnis in Differentialschreibweise $dZ(t) = \ldots$ an.

   (c) Gegeben sei ein Ito-Prozess $(X(t), t \geq 0)$ mit der Darstellung

   $$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW(s), \quad t \geq 0.$$

   Begründen Sie, warum $(Y(t), t \geq 0)$ mit

   $$Y(t) = 1 + t^2 + X(t)^3, \quad t \geq 0$$

   wieder ein Ito-Prozess ist, und geben Sie $Y(0)$, $A(t)$ und $B(t)$ für die entsprechende Darstellung

   $$Y(t) = Y(0) + \int_0^t A(s)ds + \int_0^t B(s)dW(s), \quad t \geq 0$$

   an.

   (d) Berechnen Sie $\mathrm{Cov}[W(t)^2, W(s)^2]$ und $\mathrm{Cov}[W(t^2), W(s^2)]$ für $0 \leq s \leq t$.

   (e) Berechnen Sie $E[W(t)^3 | \mathcal{F}(s)]$ für $0 \leq s \leq t$, und untersuchen Sie ob der Prozess $(W(t)^3, t \geq 0)$ ein Martingal, ein Supermartingal, ein Submartingal, oder überhaupt nichts davon ist?

2. Gegeben sind zwei quadratisch integrierbare Zufallsvariable A, B mit $\mathrm{E}\,A = \mathrm{E}\,B = \mu$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B) = \sigma^2 > 0$ und $\mathrm{Cov}(A, B) = \rho\sigma^2$. Wir betrachten nun den Prozess $(x_t \,|\, t \in \mathbb{Z})$, der definiert ist durch

$$x_t = \begin{cases} A & \text{für } t \in 2\mathbb{Z} \\ B & \text{sonst} \end{cases}$$

   (a) Zeigen Sie, dass der Prozess (x_t) stationär ist mit Autokovarianzfunktion:

$$\gamma(k) = \mathrm{Cov}(x_{t+k}, x_t) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{für } k \in 2\mathbb{Z} \\ \rho\sigma^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Berechnen Sie auch die Autokorrelationsfunktion.

   (b) Skizzieren Sie zwei (oder mehr) Trajektorien des Prozesses.

   (c) Berechnen Sie die h-Schrittprognosen $\hat{x}_{t+h} = c_0^{(h)} + c_1^{(h)} x_t + c_2^{(h)} x_{t-1}$ aus $k = 2$ vergangenen Werten. Geben Sie sowohl die Koeffizienten $c_i^{(h)}$ als auch die Varianz $\sigma_{h,2}^2 = \mathrm{E}(x_{t+h} - \hat{x}_{t+h})^2$ der entsprechenden Prognosefehler an. Was ist dabei auffällig?

   (d) Zeigen Sie, dass der Prozess auch eine Darstellung der Form

$$x_t = \bar{A} + (-1)^t \bar{B}$$

   mit zwei quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen $\bar{A}$ und $\bar{B}$ besitzt. Berechnen Sie bitte auch die Momente dieser Zufallsvariablen, d.h. $\mathrm{E}\,\bar{A}$, $\mathrm{E}\,\bar{B}$, $\mathrm{Var}(\bar{A})$, $\mathrm{Var}(\bar{B})$ und $\mathrm{Cov}(\bar{A}, \bar{B})$.

   (e) Was versteht man unter einem (linear) regulärem Prozess? Ist der oben definierte Prozess (x_t) regulär? (Begründen Sie Ihre Antwort, nur "Ja" oder "Nein" ist zu wenig.)

3. Gegeben sei eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1,2,3,4,5,6\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{6})$ und folgendem Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sei $H_A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{2,5\}\}$ und $h_i = \mathbb{P}_i[H_A < \infty]$ für $i \in I$. Bestimmen Sie h_i für alle $i \in I$.

(b) Sei $H_B = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{1,6\}\}$ und $k_i = \mathbb{E}_i[H_B]$ für $i \in I$. Bestimmen Sie k_i für alle $i \in I$.

(c) Bestimmen Sie die Kommunikationsklassen.

(d) Welche Zustände sind rekurrent, welche transient? (Begründung muß bei dieser Teilaufgabe nicht sein.)

(e) Sei $T = \inf\{n \geq 1 : X_n = 2\}$. Bestimmen Sie die Rückkehrwahrscheinlichkeit $f_2 = \mathbb{P}_2[T < \infty]$.

4. Gegeben ist das ARMA(2,1) System

$$x_t = (1/9)x_{t-2} + \epsilon_t + (1/3)\epsilon_{t-1},\ (\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$$

   (a) Überprüfen Sie die Stabilitäts-, die (strikte) Minimum-Phase Annahme und die "Koprimheits Annahme" für dieses ARMA System.

   (b) Zeigen Sie, dass der MA(∞) Prozess

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} (1/3)^j \epsilon_{t-j}$$

   eine Lösung dieses ARMA(2,1) Systems ist.

   (c) Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion dieser (stationären) Lösung (x_t).

   (d) Berechnen Sie die Einschritt-Prognose aus zwei vergangenen Werten ($h = 1$, $k = 2$) und die entsprechende Prognosefehlervarianz.

   (e) Zeigen Sie, dass der Prozess (x_t) ein AR(1) Prozess ist, d.h. finden Sie eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ und ein weißes Rauschen (η_t), sodass (x_t) die Differenzengleichung

$$x_t = a x_{t-1} + \eta_t$$

   erfüllt.

Hinweis: Die Lösung der Punkte (c) und (d) folgt natürlich auch leicht aus dem letzten Punkt (e).