Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.695 Einführung in die Stochastischen Prozesse und Zeitreihen
2021S, VO, 2.5h, 4.0EC
21.Februar 2022
Hubalek/Scherrer

90 Minuten

Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner sind erlaubt

---

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$ gegeben. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von $(W(t), t \geq 0)$.

   (a) Berechnen Sie $E[W(r)(W(t) - W(s))]$

      i. wenn $0 < r < s < t$ und

      ii. ebenso für $0 < s < r < t$.

   (b) Seien M die Menge aller reellen $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, für die $(\alpha W(t)^2 + \beta W(t) + \gamma t, t \geq 0)$ ein Martingal ist. Finden Sie eine möglichst einfache Darstellung dieser Menge in der Form $M = \{(\alpha, \beta\gamma) \in \mathbb{R}^3 : \ldots\}$.

   (c) Sei
$$U(t) = \int_0^t s dW(s), \quad V(t) = \int_0^t W(s) dW(s), \quad t \geq 0.$$
   Berechnen Sie $\mathrm{Var}[U(t)]$ und die Korrelation $\rho(U(t), V(t))$ für $t > 0$ mit einer Methode Ihrer Wahl.

   (d) Bergründen Sie genau, warum $(Z(t), t \geq 0)$ mit
$$Z(t) = W(t)^2 + 2tW(t) + 3t, \quad t \geq 0$$
   ein Ito-Prozess ist und geben Sie die entsprechende Darstellung in Differential-Notation $dZ(t) = \ldots dt + \ldots dW(t)$ an. (Für die Integraldarstellung gibt es Punkteabzüge.)

   (e) Gegeben seien die Prozesse
$$X(t) = \mu t + \sigma W(t), \quad Y(t) = e^{\theta X(t) + \eta t}, \quad t \geq 0.$$
   mit Konstanten $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0, \theta \in \mathbb{R}, \eta \in \mathbb{R}$. Dann sind $(X(t), t \geq 0)$ und $(Y(t), t \geq 0)$ Ito-Prozesse und können in der Form
$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t b(s) dW(s), \quad t \geq 0$$
   bzw.
$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t A(s) ds + \int_0^t B(s) dW(s), \quad t \geq 0$$
   dargestellt werden. Geben Sie $X(0)$, $a(t)$ und $b(t)$ und $Y(0)$, $A(t)$ und $B(t)$ an. Die Voraussetzungen zur Anwendung der Ito-Formel müssen und sollen Sie hierbei nicht überprüfen! Sollte in Ihrem Ergebnis der Ausdruck $e^{\theta X(t) + \eta t}$ vorkommen, können Sie ruhig kurz $Y(t)$ schreiben.

2. Gegeben sind zwei stationäre Prozesse (x_t) und (y_t) mit Erwartungswert $\mathrm{E}\, x_t = \mu_x$, $\mathrm{E}\, y_t = \mu_y$ und Autokovarianzfunktion $\gamma_x(k)$ und $\gamma_y(k)$. Die beiden Prozesse sind unkorreliert zueinander, d.h. $\mathrm{Cov}(x_t,\, y_s) = 0$ für alle $t, s \in \mathbb{Z}$. Betrachten Sie nun den Prozess $(z_t = \alpha x_{t+m} + \beta y_{t-m})$, wobei $m \in \mathbb{Z}$ und $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathrm{E}\, z_t$ und die Kovarianzen $\mathrm{Cov}(z_s,\, z_t)$ für alle $t, s \in \mathbb{Z}$. Geben Sie auch eine (kurze) Begründung, wieso die Zufallsvariablen z_t quadratisch integrierbar sind.

   (b) Zeigen Sie, dass der Prozess (z_t) stationär ist.

   (c) Geben Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma_z(k) = \mathrm{Cov}(z_{t+k}, z_t)$ von (z_t) an.

   (d) Unter welchen Bedingungen (an m, α, β, μ_x, μ_y, $\gamma_x(k)$ und $\gamma_y(k)$) ist der Prozess (z_t) ein weißes Rauschen?

   (e) Theoriefrage: Welche Eigenschaften hat die Autokovarianzfunktion eines stationären Prozesses?

3. (a) Gegeben sei eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3, 4\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (3/10, 7/10, 0, 0)$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:

i. $\mathbb{P}[X_4 = 4 | X_3 = 3, X_2 = 3, X_1 = 2, X_0 = 1]$

ii. $\mathbb{P}[X_4 = 4, X_3 = 3, X_2 = 3, X_1 = 2, X_0 = 1]$

(b) Berechnen Sie:

i. $\mathbb{P}[X_1 = 3]$

ii. $\mathbb{P}[X_4 = 4, X_3 = 3 | X_2 = 2]$

(c) Geben Sie die Kommunikationsklassen an. Und untersuchen Sie, welche Klassen abgeschlossen sind.

(d) Sei T die Trefferzeit für Zustand 4, also

$$T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 4\}.$$

Bestimmen Sie die Trefferwahrscheinlichkeiten $h_i = \mathbb{P}_i[T < \infty]$ für $i \in I$.

(e) Sind die Zustände 3 und 4 rekurrent oder transient? Geben Sie eine kurze Begründung (Nicht die Definition!).

4. Betrachten Sie den AR(4) Prozess

$$x_t = 0.5x_{t-4} + \epsilon_t, \ \ (\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2 = 12)$$

(a) Überprüfen Sie die Stabilitätsbedingung.

(b) Zeigen Sie, dass die Autokovarianzfunktion des Prozesses (x_t) gegeben ist durch:

$$\gamma(k) = \begin{cases} 16(0.5^{|k|/4}) & \text{für } (k/4) \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) Berechnen Sie die Ein-Schritt-, Zwei-Schritt-, Drei-Schritt- und Vier-Schrittprognose aus jeweils **einem** vergangenem Wert ($h = 1, 2, 3, 4$ und $k = 1$) und die Varianz der entsprechenden Prognosefehler.