Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift oder Bleistift verwenden!

105.695 Einführung in die Stochastischen Prozesse und Zeitreihen
2021S, VO, 2.5h, 4.0EC
16.September 2021
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Bsp.	Max.	Punkte	Bemerkungen
1	5		
2	5		
3	5		
4	5		
$\sum$	20		

1. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$ gegeben. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von $(W(t), t \geq 0)$.

   (a) Berechnen Sie $\mathbb{E}\left[W\left(t^2\right) \mid \mathcal{F}(t)\right]$ und $\mathbb{E}[W\left(t^2\right)]$ für alle $t \geq 0$. Achtung, es geht hier wirklich um $W\left(t^2\right)$ und nicht um $W(t)^2$! Unterscheiden Sie außerdem gegebenenfalls $0 \leq t \leq 1$ und $t > 1$.

   (b) Sei M die Menge aller reellen $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, für die $(\alpha W(t)^2 + \beta t^2 + \gamma t, t \geq 0)$ ein Martingal ist. Finden Sie eine möglichst einfache Darstellung dieser Menge in der Form $M = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 : \ldots\}$.

   (c) Sei
   $$U(t) = \int_0^t W(s) dW(s), \quad V(t) = \int_0^t sW(s) dW(s), \quad t \geq 0.$$
   Berechnen Sie $\mathrm{Var}[U(t)]$ und die Korrelation $\rho(U(t), V(t))$ für $t > 0$ mit einer Methode Ihrer Wahl.

   (d) Begründen Sie genau, warum $(Z(t), t \geq 0)$ mit
   $$Z(t) = W(t)^3 + t^2 W(t) + 3t^4 + 5, \quad t \geq 0$$
   ein Ito-Prozess ist und geben Sie die entsprechende Darstellung in Differential-Notation $dZ(t) = \ldots dt + \ldots dW(t)$ an. (Für die Integraldarstellung gibt es Punkteabzüge.)

   (e) Gegeben seien die Prozesse
   $$X(t) = \mu t + \sigma W(t), \quad Y(t) = e^{\theta X(t) - \lambda t}, \quad t \geq 0.$$
   mit Konstanten $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0, \theta \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $(X(t), t \geq 0)$ und $(Y(t), t \geq 0)$ Ito-Prozesse und können in der Form
   $$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t b(s) dW(s), \quad t \geq 0$$
   bzw.
   $$Y(t) = Y(0) + \int_0^t A(s) ds + \int_0^t B(s) dW(s), \quad t \geq 0$$
   dargestellt werden. Geben Sie $X(0)$, $a(t)$ und $b(t)$ und $Y(0)$, $A(t)$ und $B(t)$ an. Die Voraussetzungen zur Anwendung der Ito-Formel müssen und sollen Sie hierbei nicht überprüfen! Sollte in Ihrem Ergebnis der Ausdruck $e^{\theta X(t) - \lambda t}$ vorkommen, können Sie ruhig kurz $Y(t)$ schreiben.

2. Gegeben sind zwei (schwach) stationäre Prozesse $(x_t \,|\, t \in \mathbb{Z})$ und $(y_t \,|\, t \in \mathbb{Z})$ mit Erwartungswert $\mathbf{E}x_t = \mu_x$, $\mathbf{E}y_t = \mu_y$ und Autokovarianzfunktionen $\gamma_x(k)$ und $\gamma_y(k)$. Die beiden Prozesse sind unkorreliert zueinander, d.h. $\mathbf{Cov}(x_t, y_s) = \mathbf{E}((x_t - \mathbf{E}x_t)(y_s - \mathbf{E}y_s)) = 0$ für alle $t, s \in \mathbb{Z}$.

   Sind die folgenden Prozesse (schwach) stationär? Geben Sie eine (kurze) Begründung für Ihre Antwort.

   (a) $(z_t = x_t + y_t + 2 \,|\, t \in \mathbb{Z})$

   (b) $(z_t = x_{-t} \,|\, t \in \mathbb{Z})$

   (c) $(z_t = 2^t x_t \,|\, t \in \mathbb{Z})$, wobei wir zusätzlich annehmen, dass $\mathbf{E}x_t^2 > 0$.

   (d) $(z_t = 0.5x_t + 0.5x_{t-1} \,|\, t \in \mathbb{Z})$

   (e) $(z_t = \cos(x_t) \,|\, t \in \mathbb{Z})$, unter der zusätzlichen Annahme, dass die x_t's unabhängig und identisch verteilt sind: $(x_t) \sim \mathrm{IID}$. Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, ob der Prozess (z_t) strikt stationär ist oder nicht.

3. Gegeben sei eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1,2,3,4,5,6\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{6})$ und folgendem Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(a) Sei $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 1\}$ und $h_i = \mathbb{P}_i[T < \infty]$ für $i \in I$. Bestimmen Sie h_i für alle $i \in I$.

(b) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[T]$.

(c) Bestimmen Sie die Kommunikationsklassen.

(d) Welche Zustände sind rekurrent, welche transient? (Begründung muß bei dieser Teilaufgabe nicht sein.)

(e) Sei V_3 die Zahl der Besuche des Zustandes 3, also

$$V_3 = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=3\}}.$$

Bestimmen Sie $\mathbb{P}_3[V_3 > r]$ für $r = 1,2,3$ und tragen Sie die Werte auf vier Nachkommastellen genau in die untenstehende Tabelle ein.

r	1	2	3
$\mathbb{P}_3[V_3 > r]$			

4. Gegeben ist das ARMA(1,1) System

$$x_t = x_{t-1} + \epsilon_t - \epsilon_{t-1},\ (\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$$

(a) Überprüfen Sie die Stabilitäts-, die (strikte) Minimum-Phase Annahme und die "Koprimheits Annahme" für dieses ARMA System.

(b) Zeigen Sie, dass der Prozess

$$(x_t = z + \epsilon_t \,|\, t \in \mathbb{Z})$$

eine Lösung dieses ARMA(1,1) Systems ist, wobei z eine beliebige Zufallsvariable ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Lösung $(x_t = z + \epsilon_t \,|\, t \in \mathbb{Z})$ schwach stationär ist, wenn z quadratisch integrierbar ist und $\mathbf{E}z\epsilon_t = 0$ für all $t \in \mathbb{Z}$ gilt.

(d) Berechnen Sie unter diesen Bedingungen den Erwartungswert $\mathbf{E}x_t$ und die Autokovarianzfunktion $\gamma_x(k) = \mathbf{Cov}(x_{t+k}, x_t)$.

(e) Geben Sie die Definition folgender Begriffe an: *Innovationen* eines stationären Prozesses, *regulärer* Prozess.