Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.695 Einführung in die Stochastischen Prozesse und Zeitreihen
2021S, VO, 2.5h, 4.0EC
25.Juni 2021
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem Ergebnis

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$ gegeben. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von $(W(t), t \geq 0)$.

   (a) Berechnen Sie $E[W(r)(W(t) - W(s))]$

      i. wenn $0 < r < s < t$ und

      ii. ebenso für $0 < s < r < t$.

   (b) Seien M die Menge aller reellen $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, für die $(\alpha W(t)^2 + \beta W(t) + \gamma t, t \geq 0)$ ein Martingal ist. Finden Sie eine möglichst einfache Darstellung dieser Menge in der Form $M = \{(\alpha, \beta\gamma) \in \mathbb{R}^3 : \ldots\}$.

   (c) Sei
$$U(t) = \int_0^t s dW(s), \quad V(t) = \int_0^t W(s) dW(s), \quad t \geq 0.$$
   Berechnen Sie $\mathrm{Var}[U(t)]$ und die Korrelation $\rho(U(t), V(t))$ für $t > 0$ mit einer Methode Ihrer Wahl.

   (d) Bergründen Sie genau, warum $(Z(t), t \geq 0)$ mit
$$Z(t) = W(t)^2 + 2tW(t) + 3t, \quad t \geq 0$$
   ein Ito-Prozess ist und geben Sie die entsprechende Darstellung in Differential-Notation $dZ(t) = \ldots dt + \ldots dW(t)$ an. (Für die Integraldarstellung gibt es Punkteabzüge.)

   (e) Gegeben seien die Prozesse
$$X(t) = \mu t + \sigma W(t), \quad Y(t) = e^{\theta X(t) + \eta t}, \quad t \geq 0.$$
   mit Konstanten $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0, \theta \in \mathbb{R}, \eta \in \mathbb{R}$. Dann sind $(X(t), t \geq 0)$ und $(Y(t), t \geq 0)$ Ito-Prozesse und können in der Form
$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t b(s) dW(s), \quad t \geq 0$$
   bzw.
$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t A(s) ds + \int_0^t B(s) dW(s), \quad t \geq 0$$
   dargestellt werden. Geben Sie $X(0)$, $a(t)$ und $b(t)$ und $Y(0)$, $A(t)$ und $B(t)$ an. Die Voraussetzungen zur Anwendung der Ito-Formel müssen und sollen Sie hierbei nicht überprüfen! Sollte in Ihrem Ergebnis der Ausdruck $e^{\theta X(t) + \eta t}$ vorkommen, können Sie ruhig kurz $Y(t)$ schreiben.

2. Gegeben ist das ARMA(2,1) System

$$x_t = (1/4)x_{t-2} + \epsilon_t + (1/2)\epsilon_{t-1},\ (\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$$

   (a) Überprüfen Sie die Stabilitäts-, die (strikte) Minimum-Phase Annahme und die "Koprimheits Annahme" für dieses ARMA System.

   (b) Zeigen Sie, dass der MA(∞) Prozess

   $$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} (1/2)^j \epsilon_{t-j}$$

   eine Lösung dieses ARMA(2,1) Systems ist.

   (c) Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion dieser (stationären) Lösung (x_t).

   (d) Berechnen Sie die Einschritt-Prognose aus zwei vergangenen Werten ($h = 1, k = 2$) und die entsprechende Prognosefehlervarianz.

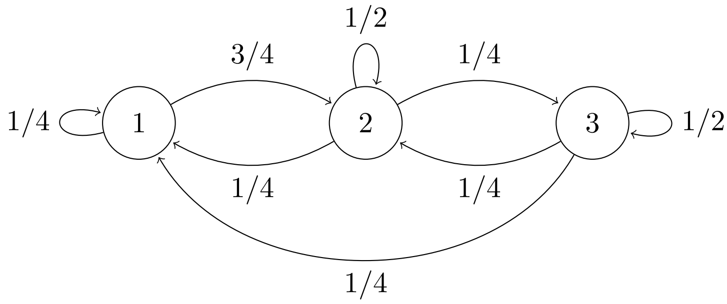
   (e) Zeigen Sie, dass der Prozess (x_t) ein AR(1) Prozess ist, d.h. finden Sie eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ und ein weißes Rauschen (η_t), sodass (x_t) die Differenzengleichung

   $$x_t = a x_{t-1} + \eta_t$$

   erfüllt.

   Hinweis: Die Lösung der Punkte (c) und (d) folgt natürlich auch leicht aus dem letzten Punkt (e).

3. (a) Gegeben sei eine Markovkette $(Y_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (2/5, 1/5, 2/5)$ und folgendem Übergangsgraph:



Berechnen Sie

i. $\mathbb{P}[X_3 = 3, X_2 = 2, X_1 = 2 | X_0 = 1]$,

ii. $\mathbb{P}[X_3 = 3 | X_2 = 2, X_1 = 2, X_0 = 1]$.

(b) (Fortsetzung) Sei

$$H = \inf\{n \geq 0 : X_n = 2\}.$$

die Trefferzeit für den Zustand 2.

i. Stellen Sie das Gleichungssystem für die Trefferwahrscheinlichkeiten $h_i = \mathbb{P}_i[H < \infty]$ für $i = 1, 2, 3$ auf, das sich aus der schwachen Markov-Eigenschaft ergibt.

ii. Ermitteln Sie diese Trefferwahrscheinlichkeiten.

(c) (Fortsetzung) Bestimmen Sie die erwartete Trefferzeit des Zustands 2, also $\mathbb{E}[H]$.

(d) Gegeben sei eine Markovkette $(R_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1, \ldots, 8\}$, Anfangsverteilung die diskrete Gleichverteilung auf I, und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.3 & 0.0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.2 & 0.0 & 0.3 \\ 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.2 & 0.0 & 0.3 \\ 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Kommunikationsklassen an.

Begründen Sie detailliert, dass die Zustände 2 und 8 kommunizieren, indem Sie entsprechende Verbindungen $i_1, \ldots, i_{n-1}$ mit $p_{2,i_1} \cdots p_{i_{n-1},8} > 0$ und umgekehrt angeben.

(e) Gegeben sei $(Z_n)_{n\geq 0} \sim \text{Markov}(\lambda, P)$ mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3, 4\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$. Die Potenzen der Übergansmatrix P sind

$$P^{2n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{1-2n} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 2^{1-2n} \\ 2^{1-2n} & 0 & \frac{1}{2} - 2^{1-2n} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad n \geq 1,$$

und

$$P^{2n} = \begin{pmatrix} 2^{-2n} & 0 & \frac{1}{2} - 2^{-2n} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2^{-2n} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 2^{-2n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad n \geq 1.$$

Zerlegen Sie den Zustandsraum in Kommunikationsklassen und untersuchen sie (mit genauer Begründung) welche Klassen rekurrent bzw. transient sind.

4. Betrachten Sie den Prozess

$$(x_t = A\sin(\lambda t) + B\cos(\lambda t) \mid t \in \mathbb{Z}),$$

wobei $0 < \lambda < \pi$ und A, B zwei quadratisch integrierbare Zufallsvariable sind mit $\mathbf{E}A = \mathbf{E}B = 0$, $\mathbf{E}A^2 = \mathbf{E}B^2 = 1$ und $\mathbf{E}[AB] = 0$.

(a) Skizzieren Sie eine "typische" Trajektorie des Prozesses für $\lambda = \frac{2\pi}{5}$.

(b) Berechnen Sie $\mathbf{E}x_t$ und $\mathbf{E}x_t x_s$ für alle $t, s \in \mathbb{Z}$. Hinweis:

$$\cos(\theta)\cos(\mu) + \sin(\theta)\sin(\mu) = \cos(\theta - \mu)$$

(c) Zeigen Sie, dass der Prozess (x_t) stationär ist und berechnen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma(k) = \mathbf{Cov}(x_{t+k}, x_t)$.

(d) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} B &= x_0 \\ A &= (x_0\cos(\lambda) - x_{-1})/\sin(\lambda) \end{aligned}$$

und damit

$$x_1 = (2\cos(\lambda))x_0 + (-1)x_{-1}$$

(e) Warum folgt aus Punkt (d), dass sich der Prozess perfekt aus den letzten zwei Beobachtungen prognostizieren lässt? Geben Sie auch die Koeffizienten der Einschritt-Prognose $\hat{x}_{t+1} = c_1 x_t + c_2 x_{t-1}$ aus $k = 2$ vergangenen Werten an. (Diese Prognose ist wie gesagt perfekt: Die Varianz des entsprechenden Prognosefehlers ist gleich Null!)