Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.695 Einführung in die Stochastischen Prozesse und Zeitreihen
2020S, VO, 2.5h, 4.0EC
28.September 2020
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem Ergebnis

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. A, B seien zwei quadratisch integrierbare Zufallsvariable mit $\mathbf{E}A = \mu_A$, $\mathbf{E}B = \mu_B$, $\mathrm{Var}(A) = \sigma_A^2$, $\mathrm{Var}(B) = \sigma_B^2$ und $\mathrm{Cov}(A, B) = \sigma_{AB}$. Wir betrachten nun den Prozess

$$(x_t = A + (-1)^t B \,|\, t \in \mathbb{Z}). \tag{1}$$

   (a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathbf{E}x_t$, die Varianzen $\mathrm{Var}(x_t)$ und die Kovarianzen $\mathrm{Cov}(x_t, x_s)$ für alle $t, s \in \mathbb{Z}$.

   (b) Zeigen Sie, dass der Prozess (x_t) dann und nur dann (schwach) stationär ist, wenn $\mu_B = 0$ und $\sigma_{AB} = 0$ gilt. Geben Sie für diesen Fall auch die Autokovarianzfunktion $\gamma(k) = \mathrm{Cov}\,(x_{t+k}, x_t)$ und die Autokorrelationsfunktion $\rho(k) = \mathrm{Corr}(x_{t+k}, x_t)$ an.

   (c) Zeigen Sie, dass der Prozess (x_t) eine Lösung für das folgende AR(2) System ist:

$$x_t = x_{t-2} \tag{2}$$

   (d) Überprüfen Sie die Stabilitätsannahme für dieses AR System.

   (e) Wieso besitzt das AR(2) System (2) eine stationäre Lösung, obwohl die Stabilitätsannahme *nicht* erfüllt ist?

2. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$ gegeben. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Berechnen Sie $E[W(t)^3]$ und $E[W(t)^3|\mathcal{F}(s)]$ für $0 < s < t$.

   (b) Gegeben sei eine Konstante $a \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie, ob der Prozess $(aW(t)^2 - t, t \geq 0)$ ein Martingal[1], ein Submartingal, ein Supermartingal oder nichts davon ist. Führen Sie eine vollständige Diskussion für alle $a \in \mathbb{R}$ durch!

   (c) Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} W(2^{-k}) I_{[k,k+1)}(t), \quad t \geq 0.$$

   Zeigen Sie, dass $f \in M^2_{\text{step}}$.

   (d) Berechnen Sie $E[I(f)^2]$ für f aus der vorigen Teilaufgabe mit der Ito-Isometrie. Finden Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für das Ergebnis.

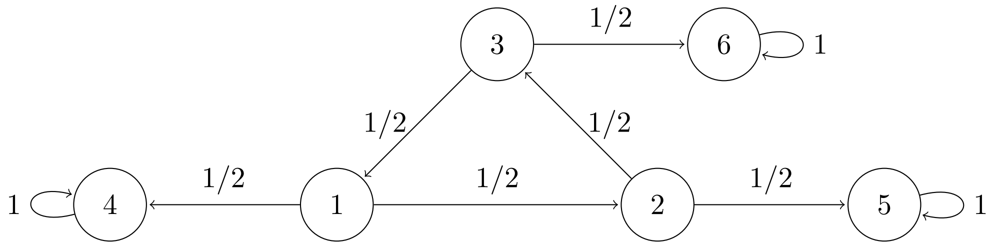
   (e) Sei $F(t,x) = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}x - t}$ und $S(t) = F(t, W(t))$. Dann folgt mit der Ito-Formel, dass S ein Ito-Prozess mit einer Differentialdartellung

$$dS(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)$$

   ist, wobei $a \in \mathcal{L}^1_T$ und $b \in M^2_T$ für alle $T > 0$. Berechnen Sie $a(t)$ und $b(t)$.

[1]Ein Martingal ist automatisch immer auch ein Submartingal und ein Supermartingal, das müssen Sie in diesem Fall nicht extra dazuschreiben.

3. (a) Gegeben sei eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1,2,3,4,5,6\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (1/3, 1/3, 1/3, 0, 0, 0)$ und folgendem Übergangsgraph:



Bestimmen Sie die Verteilung von X_1 und X_2, also $\lambda_i^{(1)} = \mathbb{P}[X_1 = i]$ und $\lambda_i^{(2)} = \mathbb{P}[X_2 = i]$ für $i \in I$.

(b) Sei $A = \{4,5,6\}$ und $H = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$. Geben Sie die Trefferwahrscheinlichkeiten $h_i = \mathbb{P}_i[H < \infty]$ für $i \in I$ an.

(c) Berechnen Sie die erwarteten Trefferzeiten $k_i = \mathbb{E}_i[H]$ für $i \in I$.

(d) Bestimmen Sie die Kommunikationsklassen der Kette und geben Sie, welche Klassen rekurrent und welche transient sind.

(e) Diese Teilaufgabe handelt nicht von der speziellen Markovkette aus den obigen Teilaufgaben, sondern von den Trefferwahrscehinlichkeiten und den Rückkehrwahrscheinlichkeiten einer beliebigen Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum I, Anfangsverteilung λ und Übergangsmatrix P. Es gilt

$$f_i = \sum_{j\in I} p_{ij} h_j^{\{i\}}, \qquad i \in I.$$

Interpretieren Sie diese Gleichung. Mit welcher Eigenschaft von Markovketten bzw. mit welchem Satz über Markovketten ist diese Gleichung direkt zu begründen?[2]

[2] Zur Erinnerung:

$$H^A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}, \qquad T_i = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}, \qquad i \in I, A \subseteq I$$

$$h_i^A = \mathbb{P}_i[H^A < \infty], \qquad f_i = \mathbb{P}_i[T_i < \infty], \qquad i \in I.$$

4. Gegeben ist folgender ARMA(2,1) Prozess

$$x_t = 0.25x_{t-2} + \epsilon_t + 0.5\epsilon_{t-1}, \quad (\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2 = 1) \tag{3}$$

(a) Überprüfen Sie die Stabilitäts-, die (strikte) Minimum-Phase Annahme und die "Koprimheits-Annahme".

(b) Zeigen Sie, dass der Prozess (x_t) folgende MA(∞) Darstellung besitzt:

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} (0.5)^j \epsilon_{t-j} \tag{4}$$

Hinweis: Sie können die in der VO angegebenen „Rekursionsgleichungen" zur Bestimmung der Koeffizienten der MA(∞) Darstellung verwenden, oder auch zeigen, dass der MA(∞) Prozess $(\sum_{j\geq 0}(0.5)^j \epsilon_{t-j})$ die Differenzengleichung (3) erfüllt.

(c) Zeigen Sie, dass der Prozess (x_t) auch folgende Differenzengleichung erfüllt:

$$x_t = 0.5x_{t-1} + \epsilon_t \tag{5}$$

D.h. (x_t) ist eigentlich ein AR(1) Prozess. Wie hängt diese Beobachtung mit Punkt (a) zusammen?
Hinweis: Zeigen Sie einfach, dass der MA(∞) Prozess $(\sum_{j\geq 0}(0.5)^j \epsilon_{t-j})$ auch die Differenzengleichung (5) erfüllt

(d) Geben Sie die Autokorrelationsfunktion $\rho(k) = \mathrm{Corr}\,(x_{t+k}, x_t)$ des Prozesses an.

(e) Berechnen Sie die Zweischrittprognose $\hat{x}_{t+2} = c_1 x_t + c_2 x_{t-1} + \cdots$ des Prozesses aus der unendlichen Vergangenheit und die entsprechende Prognosefehlervarianz $\sigma_2^2 = \mathbf{E}(x_{t+2} - \hat{x}_{t+2})^2$.
Hinweis: Für die beiden Punkte (d) und (e) ist es natürlich einfacher die AR(1) Darstellung des Prozesses zu verwenden.